Dr. B. Farkas
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
26.10.2006

Lineare Algebra I für Pysiker

1. Übungsblatt

Gruppenübungen

G1 Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ mit $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ mit $\mathbb{Z}$. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$. Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit $\mathbb{R}$. Aus der Schule wißt ihr vielleicht, daß $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation einen sogenannten Körper bilden. Das ist sehr grob gesagt eine Struktur, für die gilt:

> Die Summe und Differenz sowie das Produkt und der Quotient zweier Elemente des Körpers liegt wieder im Körper.

i) Mache dir klar, daß $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ keine Körper sind.

ii) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lösbar:

a) $x - 1 = 0$ b) $x + 1 = 0$ c) $x^2 = 4$ d) $x^2 = 2$ e) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$?

iii) Kennst du eine Gleichung, die nicht in $\mathbb{R}$ lösbar ist?

G2 In der Logik hat man es mit Aussagen und Operationen zu tun. Unter einer mathematischen Aussage verstehen wir ein "Gebilde", dem man eindeutig einen der Werte wahr (w) oder falsch (f) zuordnen kann. Wir bezeichnen sie im Folgenden mit Großbuchstaben A,B,.... Aussagen können mit folgenden Operationen verknüpft werden:

1) A "und" B, $A \wedge B$
2) A "oder" B, $A \vee B$
3) "nicht" A, $\neg A$
4) A "impliziert" B, $A \Rightarrow B$ ("falls A wahr ist, ist auch B wahr"="aus A folgt B")
5) $A \Leftrightarrow B := A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$.

Unter den Operationen gibt es folgende Priorität: $\neg > \wedge, \vee > \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Operationen lassen sich in so genannten Wahrheitstafeln darstellen.

(a)

A	B	?
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

(b)

A	B	?
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

i) Entscheide, um welche Operationen es sich bei den Tafeln (a) und (b) handelt.

ii) Bestimme die Wahrheitstabelle der Operationen $A \vee B$ und $A \Leftrightarrow B$.

iii) Bestimme alle Teilformeln der Formel $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ und erstelle eine Wahrheitstafel für diese Formel.

iv) Beweise folgende Regeln:

a) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ b) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ c) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
d) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$

G3 (Cauchy-Schwartz Ungleichung)
Es seien für $k \in \mathbb{N}$ $(a_1, \ldots, a_{2^k})$, $a_i \in \mathbb{R}$ und $(b_1, \ldots, b_{2^k})$, $b_i \in \mathbb{R}$ 2^k-Tupel. Zeige mittels vollständiger Induktion, daß für 2^k-Tupel für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\sum_{i=1}^{2^k} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{2^k} a_i^2)(\sum_{i=1}^{2^k} b_i^2).$$

Hausübungen

H1 3 Punkte

Ein Inder erzählt, daß nach einer alten Sage im Tempel seiner Heimatstadt einst drei Götterstatuen nebeneinander standen, die gesprochen haben sollen. Eine der Statuen stellt den Gott der Lüge dar, der grundsätzlich log. Der Gott der Wahrheit antwortete auf alle Fragen wahrheitsgemäß und der Gott der Diplomatie habe die Eigenschaften der beiden Erstgenannten in sich vereint. Lange Zeit habe niemand gewusst, welches der drei Standbilder welchen Gott darstellt, bis es eines Tages einem indischen Weisen gelang dieses Rätsel zu lsen. Er begab sich zum Tempel und fragte die linke Statue: "Wer steht neben dir?" Er erhielt die Antwort: "Der Gott der Wahrheit." Die Frage an das mittlere Standbild: "Wer bist du" brachte ihm die Antwort: "Der Gott der Diplomatie" Das dritte Standbild gab schließlich auf die Frage: "Wer steht neben dir?" die Antwort: "Der Gott der Lüge." Welche der drei Statuen stellt welchen Gott dar?

H2 4 Punkte

Löse folgende Auseinandersetzung:

Herr A sagt: "Frau B lügt"
Frau B sagt: "Herr C lügt."
Herr C sagt:"Herr A und Frau B lügen."

H3 2 Punkte

Entscheide welche Zeichenreihe eine Aussage ist.

a) $3 = 3$ *b)* $5 + 1$ *c)* 4 ist eine Primzahl *d)* Tischlein, deck' dich!

H4 Wieviele Wahrheitstafeln zweier Aussagen gibt es? 2 Punkte

H5 Wo steckt der Fehler? 4 Punkte

Beh.: Alle Pferde sind weiß.
Bew.: Wir stellen fest, daß es weiße Pferde gibt. Wir nehmen ein weißes Pferd und beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion in der folgenden Form: Jede Herde von n Pferden, die dieses eine weiße Pferd enthält, besteht nur aus weißen Pferden.

i) Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n = 1$.

ii) Die Behauptung sei schon erwiesen für jede Herde, die aus n Pferden besteht.

iii) Haben wir nun eine Herde von n+1 Pferden vor uns, so entfernen wir vorübergehend ein Pferd aus dieser Herde. Nach Induktionsvorraussetzung besteht die übrig bleibende Herde mit n Pferden aus lauter weißen Pferden. Bringt man nun dieses eine Pferd zur Herde zurück und entfernt statt dessen ein anderes, so bleibt nach Induktionsvorraussetzung wiederum eine Herde aus lauter weißen Pferden zurück, sodaß das vorhin entfernte Pferd ebenfalls weiß sein muß. Mit diesem Verfahren läßt sich also zeigen, daß auch jedes Pferd aus der Herde mit n+1 Pfeden weiß ist.

Im Beweis wurde nicht versucht, die tatsächlich Behauptung zu beweisen. Welche Behauptung stattdessen? Warum hätte es genügt, diese zu zeigen?