Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.Bokowski
Kristina Altmann
Matthias Bergner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006-2007 20.11.2006

Lineare Algebra I

6. Tutorium

(T 1)

(a) Invertiere folgende Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwende das folgende Schema. Schreibe die Matrix A und daneben die Einheitsmatrix auf dein Blatt. Führe nun den Gauß-Algorithmus an der Matrix A solange aus, bis Du die Einheitsmatrix erreichst hast. Führe simultan die selben Rechnungen an der danebenstehenden Matrix aus. Prüfe, ob Du am Ende die inverse Matrix A^{-1} berechnet hast.

(b) Bestimme für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Matrix $E_{21}(\lambda)$, so daß das Produkt $E_{21}(\lambda)A$ diejenige Matrix ist, welche aus A entsteht, indem man das λ-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile addiert.

(c) Bestimme eine Matrix T_{12}, so daß $T_{12}A$ diejenige Matrix ist, welche aus A durch Vertauschen der ersten und zweiten Zeile entsteht. (Der Buchstabe T steht hierbei für Transposition).

(T 2)

Im folgenden betrachten wir reelle quadratische Matrizen beliebiger Größe $n \in \mathbb{N}$. Sei also A eine $n \times n$ Matrix.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$. Bestimme eine Matrix $E_{jk}(\lambda)$, so daß das Produkt $E_{jk}(\lambda)A$ diejenige Matrix ist, welche aus A entsteht, indem man das λ-fache der k-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert.

(b) Sei $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$. Bestimme eine Matrix T_{jk}, so daß $T_{jk}A$ diejenige Matrix ist, welche aus A durch Vertauschen der j-ten und k-ten Zeile entsteht.

(c) Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Bestimme eine Matrix $D_j(\lambda)$, so daß $D_j(\lambda)A$ diejenige Matrix ist, welche aus A durch Multiplizieren der j-ten Zeile mit λ entsteht.

(T 3)

(a) Zeige, daß alle Matrizen $E_{jk}(\lambda), T_{jk}$ invertierbar sind. Zeige, daß alle Matrizen $D_j(\lambda)$ für $\lambda \neq 0$ invertierbar sind.

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$. Zeige, daß folgende Aussagen für eine $n \times n$ Matrix A äquivalent sind:

  (i) A ist invertierbar.

(ii) $E_{jk}(\lambda)A$ ist invertierbar.

(iii) $T_{jk}A$ ist invertierbar.

(iv) $D_j(\lambda)A$ ist invertierbar für $\lambda \neq 0$.

Mit anderen Worten, ob eine Matrix invertierbar ist, ändert sich nicht unter elementaren Zeilenumformungen.

(T 4)

Sei A eine $n \times n$ Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$.

(a) Beschreibe die Matrizen $AE_{jk}(\lambda)$ und AT_{jk} mit Worten. Beschreibe die Matrizen $AD_j(\lambda)$ mit $\lambda \neq 0$ mit Worten.

(b) Zeige, daß die Tatsache, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht, sich nicht unter elementaren Spaltenumformungen ändert.

(T 5)

Betrachte nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten außserdem die Menge aller oberen (unteren) Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale

$$N = \{L = (l_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \mid l_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j, l_{ii} = 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

$$N^T = \{L^T \mid L \in N\}$$

(a) Finde eine Matrix $L_1 \in N^T$, so daß gilt

$$L_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

(b) Finde eine Matrix $R_1 \in N$, so daß gilt

$$AR_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & * & * \\ 2 & * & * \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimme die Matrix $A_2 = L_1 A R_1$. Bestimme Matrizen $L_2 \in N^T$ und $R_2 \in N$, so daß $L_2 A_2 R_2$ eine Diagonalmatrix ist. Zeige, daß $A = LDR$ für geeignete Matrizen $L \in N^T, R \in N$ und D eine Diagonalmatrix.