Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.Bokowski
Kristina Altmann
Matthias Bergner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2006-2007 20.11.2006

Lineare Algebra I

5. Tutorium

Wir wollen uns in diesem Tutorium noch einmal ausführlich mit dem Zusammenhang zwischen linearer Unabhängigkeit und affiner Unabhängigkeit bzw. der linearen Hülle und der affinen Hülle beschäftigen .

Wir wiederholen kurz die Definitionen:

Sind $v_1, \ldots, v_r$ r Vektoren aus einem Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$, dann ist

$$\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_r) = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i | \lambda_i \in \mathbb{K}\},$$

die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_r$, die lineare Hülle von $v_1, \ldots, v_r$.

Die affine Hülle von $v_1, \ldots, v_r$ ist die Menge

$$\operatorname{aff}(v_1, \ldots, v_r) = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i | \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1\}.$$

Die Menge

$$\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_r) = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i | 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } 1 \leq i \leq r, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1\}$$

heißt die konvexe Hülle von $v_1, \ldots, v_r$.

(T 1)

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über den reellen Zahlen und die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimme die lineare Hülle, die konvexe Hülle und die affine Hülle von v_1, v_2 und v_3.

(b) Erstelle eine Zeichnung von diesen Mengen.

(c) Zeige allgemein, daß für Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines Vektorraumes V über $\mathbb{K}$ die lineare Hülle ein Untervektoraum ist.

(d) Zeige, daß für Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines Vektorraumes V über $\mathbb{K}$ $\operatorname{aff}(v_1, \ldots, v_n) = v_1 + \operatorname{lin}(v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1)$. Beweise auch das $\operatorname{aff}(v_1, \ldots, v_n) - v_1$ ein Untervektoraum ist. Die Dimension von $\operatorname{aff}(v_1, \ldots, v_n)$ ist definiert als $\dim(\operatorname{aff}(v_1, \ldots, v_n) - v_1)$.

(T 2)

Sei nun $V = \mathbb{R}^4$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir wählen die folgenden 7 Punkte.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -27 \\ 81 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}, v_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \end{pmatrix}$$

(a) Wieviele verschiedene Mengen von 4 verschiedenen Vektoren $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ mit $c_i \in \{v_1, \dots, v_7\}$ für $1 \leq i \leq 4$ kannst du auswählen? Wieviele verschiedene Mengen von 3 verschiedenen Vektoren $\{c_1, c_2, c_3\}$ mit $c_i \in \{v_1, \dots, v_7\}$ für $1 \leq i \leq 3$ kannst du auswählen?

(b) Zeige daß 4 verschiedene Vektoren c_1, c_2, c_3, c_4 mit $c_i \in \{v_1, \dots, v_7\}$ für $1 \leq i \leq 4$ affin unabhängig sind. Bestimme die Dimension von $\mathrm{aff}(c_1, c_2, c_3, c_4)$. Zeige daß 3 verschiedene Vektoren c_1, c_2, c_3, mit $c_i \in \{v_1, \dots, v_7\}$ für $1 \leq i \leq 3$ affin unabhängig sind. Bestimme die Dimension von $\mathrm{aff}(c_1, c_2, c_3)$.

Hinweis: Wir betrachten die Vektoren $w_i = \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \end{pmatrix}$ für $1 \leq i \leq 7$ in $\mathbb{R}^5$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_r$ heißen affin unabhängig (bzw. in allgemeiner Lage) genau dann, wenn $v_2 - v_1, \dots, v_r - v_1$ linear unabhängig sind. Diese Definition ist equivalent zu der folgenden Formulierung: Die Vektoren $v_1, \dots, v_r$ heißen affin unabhängig (bzw. in allgemeiner Lage) genau dann, wenn die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ v_r \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

Benutze die Determinate zu deiner Überprüfung.

(c) Versuche Dir eine Skizze zu machen von der beschriebenen Konfiguration.

(d) Wir wählen nun die folgende Ebene

$$E = \{x | x = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 64 \\ 256 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -64 \\ 256 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 125 \\ 625 \end{pmatrix}; \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\}$$

Berechne die Schnittmenge von $\mathrm{aff}(c_1, \dots, c_4)$ und E sowohl wie die Schnittmenge von $\mathrm{aff}(d_1, \dots, d_3)$ und E für jede Mengen von 4 verschiedenen Vektoren $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ mit $c_i \in \{v_1, \dots, v_7\}$ für $1 \leq i \leq 4$ und jede Mengen von 3 verschiedenen Vektoren $\{d_1, d_2, d_3, \}$ mit $d_i \in \{v_1, \dots, v_7\}$ für $1 \leq i \leq 3$.

Bestimme die Dimension von $\mathrm{aff}(c_1, \dots, c_4) \cap E$ und die Dimension von $\mathrm{aff}(d_1, \dots, d_3) \cap E$.

Hinweis: Benutze den Gauß-Algorithmus und berechne die Schnittmengen nur für ausgewählte Beispiele.

(e) Wieviele Punkte und wieviele Geraden erhälst du in E. In welcher Beziehung stehen diese Objekte?