Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.Bokowski
Kristina Altmann
Matthias Bergner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006-2007 20.11.2006

Lineare Algebra I

4. Tutorium

Test

(TT 1)

Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ Sei $V = \text{lin}(v_1, \ldots v_k)$, dann kann die Menge $\{v_1, \cdots, v_k\}$ zu einer Basis von V ergänzt werden.
- ☐ Seien $v_1, \cdots, v_k$ linear unabhängige Vektoren von V, dann bilden Sie eine Basis von V.
- ☐ Sei $V = \text{lin}(v_1, \cdots v_k)$, dann gibt es eine Basis von V, die nur Vektoren aus der Menge $\{v_1, \cdots, v_k\}$ enthält.

(TT 2)

Welche der folgenden Ungleichungen sind wahr für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$?

☐ $\dim(\text{Bild}\varphi) \leq \dim(V)$, ☐ $\dim(\text{Kern}\varphi) \leq \dim(V)$,

☐ $\dim(\text{Bild}\varphi) \leq \dim(W)$, ☐ $\dim(\text{Kern}\varphi) \leq \dim(W)$.

(T 1) lineare Abbildungen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Zeige das die Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ c \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{K}$ genau dann linear ist wenn $c = 0$. Bestimmen Sie für $c = 0$ den Kern und das Bild der Abbildung φ.

(b) Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine Abbildung zwischen V und W. Beweisen Sie, φ ist genau dann linear wenn der Graph $\{(v, \varphi(v)) : v \in V\}$ von φ ein linearer Untervektorraum von $V \times W$ ist.

(c) Zeigen Sie, jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ist von der Form $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ für einen Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Hinweis: Betrachten Sie $\varphi(e_i)$ für $i = 1, \cdots, n$.

(T 2) lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir definieren weiterhin $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ mal}}$ und $\varphi^0 = id_V$.

Sei nun $v \in V$ und $\varphi^n(v) = 0$ während $\varphi^{n-1}(v) \neq 0$ für $n \geq 1$. Zeige, dass die Vektoren $v, \varphi(v), \cdots, \varphi^{n-1}(v)$ linear unabhängig in V sind.

(T 3) Polynome

Wir beenden die Aufgabe 2 vom letzten Tutoriumsblatt.

Wir betrachten die Polynome

$$p_1 = 1 + t + t^2 + 2t^4,\ p_2 = 2 + t^2 + t^4,\ p_3 = 1 + t^2 + t^4 \in \mathbb{R}[t]$$

$$q_1 = 2 + 3t,\ q_2 = 2 + 3t + t^2 + t^4,\ q_3 = 1 + t + t^2 + t^4 \in \mathbb{R}[t]$$

Sei S_1 der Unterraum von $V := \{p \in \mathbb{R}[t]\ : \deg(p) \leq 4\}$ erzeugt von p_1, p_2, p_3 und S_2 der erzeugte Unterraum von q_1, q_2, q_3 in V.

Zeige : p_1, p_2, p_3 ist eine Basis von S_1 and q_1, q_2, q_3 is eine Basis von S_2.

Finde eine Basis von $S_1 + S_2$

Welche Dimension haben die Unterräume $S_1, S_2, S_1 + S_2, S_1 \cap S_2$.

Hinweis: Benutze die Koordinatenabbildung von der Basis $(1, t, t^2, t^3, t^4)$ von V nach $\mathbb{R}^5$.