Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.Bokowski
Kristina Altmann
Matthias Bergner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006-2007 20.11.2006

Lineare Algebra I

3. Tutorium

(T 1) Vektorraum über $\mathbb{F}_2$

Bisweilen spielen endliche Körper eine wichtige Rolle. Wenn beispielsweise nur die Vorzeichen von Variablen entscheidend sind, kann es sinnvoll sein, einen Körper mit drei Elementen $\{-1, 0, 1\}$ einzusetzen. Eine vergleichbare endliche Stuktur soll hier durchdacht werden.

Definiere einen Vektorraum mit den vier Elementen $V := \{♣, ♠, ♡, ♢\}$.

Hinweis: Betrachte die Menge $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit der Addition $x + y \bmod 2$ und der Multiplikation $x \cdot y \bmod 2$. Ist $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper? Betrachte den Vektorraum $\mathbb{F}_2^2 = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ über $\mathbb{F}_2$.

Hinweis: Wähle eine bijective Abbildung $f : \mathbb{F}_2^2 \to V$. Benutze f um die algebraische Struktur von $\mathbb{F}_2^2$ nach V zu transportieren.

(T 2) Polynome

Bei der Approximation von Funktionen durch Polynome kann es wichtig sein, einen Übergang zu einer anderen Basis von Polynomen vorzunehmen. Solche Überlegungen werden hier eingeübt, um sie etwa bei Approximationsproblemen einsetzen zu können.

Zeige, dass die Menge

$$B = \{1,\ t,\ t(t-1), t(t-1)(t-2), t(t-1)(t-2)(t-3)\}$$

eine Basis des Vektorraumes $V := \{p \in \mathbb{R}[t]\ : \deg(p) \leq 4\}$ ist.

Hinweis: Beweise zuerst, dass die Elemente von B linear unabhängig sind. Versuche nun die Polynome $1, t, t^2, t^3, t^4$ als Linearkombinationen der Vektoren von B zu schreiben.

(T 3)

Die Begriffe der linearen Algebra tauchen in vielen Zusammenhängen auf. Das Beispiel behandelt eine Strukturgleichheit, die zunächst überraschend erscheint.

Sei $S = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ :\ a_n \in \mathbb{R} \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$ der Vektorraum aller reellen Folgen. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ heißt Fibonacci Folge wenn:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir bezeichnen mit Fib die Menge der Fibonacci Folgen.

a) Zeige Fib ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraum S und isomorph zu $\mathbb{R}^2$. (Benutze die Abbildung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \binom{a_1}{a_2}$)

b) Find eine Basis von Fib.

c) Zeige der Unterraum Fib enhält genau zwei verschiedene geometrische Folgen f_1 und f_2, d.h. Folgen der Form

$$a_n = \rho^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

für eine reelle Zahl $\rho \neq 0$.(Hinweis: $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$)

d) Zeige dass diese beiden Folgen f_1 and f_2 von (c) linear unabhängig sind.

e) Finde eine Linearkombination von f_1 und f_2 für die Fibonacci Folge $f = (0, 1, 1, 2, 3, \ldots)$.