**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.Bokowski
Kristina Altmann
Matthias Bergner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006-2007 20.11.2006

# Lineare Algebra I

## 2. Tutorium

### (T 1) Nullstellen von Polynomen

(a) Schreibe ausführlich auf, wie man für komplexe Zahlen $a, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \{2, 3 \ldots\}$ alle Nullstellen des Polynoms $(z-a)^n - w$ findet.

(b) Es sei $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein reelles Polynom, d.h. die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ seien reelle Zahlen. Zeige: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p$, so auch $\bar{z}$.

(c) Sei $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein reelles Polynom mit der komplexen Nullstelle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Zeige, $p$ ist ohne Rest durch das Polynom $q(x) = x^2 - 2\mathrm{Re}(z)x + |z|^2$ teilbar.

### (T 2) Körper

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie das $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit den Einschränkungen der Verknüfungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper ist.

(b) Ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$? Ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

(c) Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

- 10 und $14 + \sqrt{2}$
- $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$
- 5 und $7 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

### (T 3) Unterraum

(a) Seien $v_1, \ldots, v_r$ Vektoren des Vektorraumes $V$ über einen Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie: Die Menge $L = \{\sum_{i=1}^r a_i \cdot v_i | a_i \in \mathbb{K}\}$ aller Linearkombinationen der $v_i$'s, ist ein Unterraum von $V$.

(b) Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^X$ von Abbildungen von einer Menge $X$ in die reellen Zahlen. Sei weiterhin $x_0 \in X$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f \in \mathbb{R}^X : f(x_0) = c\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^X$?

Zeige auch das $\{f \in \mathbb{R}^X : f(-x) = -f(x)\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^X$ ist.

### (T 4) lineare Unabhängigkeit

Seien $u_1, \ldots, u_n$ linear unabhängige Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes $V$. Zeige: Für $u = \sum_{i=1}^n c_i u_i$ sind die Vektoren $u_1 - u, \ldots, u_n - u$ genau dann linear abhängig , wenn $\sum_{i=1}^n c_i = 1$.