Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.Bokowski
Kristina Altmann
Matthias Bergner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006-2007 20.11.2006

Lineare Algebra I

1. Tutorium

(T 1) Polarkoordinaten komplexer Zahlen

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit Betrag $|z|$ und Argument $arg(z) = \varphi$ führen wir die Schreibweise $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$ ein und nennen diese die Darstellung von z in Polarkoordinaten. Hingegen nennen wir $x + iy$ die Darstellung in kartesischen Koordinaten. Beachte dass $arg(z)$ nur bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt ist. Daher gilt $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi + 2\pi + i\sin\varphi + 2\pi) = |z| \cdot e^{i(\varphi+2\pi)}$.

(a) Bestimme die Polarkoordinaten von $x = \frac{i-1}{2}$ und $y = -8i$.

(b) Wie multipliziert man zwei komplexe Zahlen in Polarkoordinaten?
[Hinweis: Benutze die Additionstheoreme : $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos\varphi_1 + \varphi_2$ und $\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 = \sin\varphi_1 + \varphi_2$]
Berechne $x \cdot y$ und x^4.

(c) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Welche Bedingungen müssen $|z|$ und $arg(z)$ erfüllen, damit $z^3 = y$ gilt? Finde drei verschiedene komplexe Zahlen z, die diese Gleichung erfüllen. Stelle diese Zahlen in kartesischen Koordinaten dar. Gib es weitere Lösungen dieser Gleichung?

(T 2) Gaußsche ganze Zahlen

Die Menge $\Gamma := \{m + in : m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet man als Gaußschen ganzen Zahlen. Wir definieren für $z \in \Gamma$ die Menge $z \cdot \Gamma := \{z \cdot w : w \in \Gamma\}$.

(a) Skizziere Γ und zeige, dass für jedes $z \in \Gamma$ gilt $z \cdot \Gamma \subseteq \Gamma$.

(b) Skizziere die Menge $z \cdot \Gamma$ für $z = 2+3i$. Mach dir klar, dass $z \cdot \Gamma$ durch eine Drehstreckung aus Γ hervorgeht. Gib den Streckfaktor und den Drehwinkel an. Für welches $z \in \Gamma$ gilt $z \cdot \Gamma = \Gamma$.

(T 3) komplexe Primzahlen

Sei $z_1, z_2 \in \Gamma$. Wir sagen z_1 teilt z_2, falls es eine komplexe Zahl $w \in \Gamma$ gibt, so dass $z_2 = w \cdot z_1$ ist.

Finde alle komplexen Zahlen $z \in \Gamma$, die 1 teilen. Die Elemente von $U = \{z \in \Gamma : z \text{ teilt} 1\}$ bezeichnet man als Einheiten von Γ. Für $z \in \Gamma$ sei $z \cdot U = \{z \cdot u : u \in U\}$.

Zeige: Alle Elemente aus $z \cdot U$ teilen z.

Um Primzahlen zu definieren betrachten wir den ersten Quadranten Q der komplexen Zahlenebene.

$$Q := \{m + in : m > 0, n \geq 0\}$$

Eine komplexe Zahl z heißt komplexe Primzahl von Γ, wenn $z \in Q \setminus \{1\}$ und falls 1 und z die einzigen Zahlen aus Q sind , die z teilen.

(a) Weise nach, dass $1+i$ bezüglich des Betrages die kleinste komplexe Primzahl ist.

(b) Gib zwei Primzahlen an, die keine komplexen Primzahlen sind.

(c) Zeige: Gibt es Zahlen $m > 0$ und $n \geq 0$ mit der Eigenschaft $m^2 + n^2 = k$, so ist k keine komplexe Primzahl.

(T 4) Wurzeln komplexer Zahlen

Bestimme die kartesischen Koordinaten aller komplexen Lösungen folgender Gleichungen.

(a) $z^3 = 27i$

(b) $(z - \frac{i}{2})^3 = 27i$

Wenn a eine reelle Zahl ist, was sind dann die Lösungen der Gleichung $z^2 = a$ in den komplexen Zahlen?