(G 1) Diagonalisierung von Matrizen
Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, falls eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix C existiert mit $C^{-1}AC = D$. Die Diagonale von D enhält dann die Eigenwerte von A und die Spaltenvektoren von C sind die zugehörigen Eigenvektoren.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist.

(G 2) Hauptachsentransformation
Gegeben sei die quadratische Form
$$Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy .$$

a) Ermitteln Sie eine symmetrische 2×2-Matrix A, sodass $\langle Av, v\rangle = Q(v)$ gilt mit $v = (x, y)$.

b) Ermitteln Sie die Hauptachsen der Ellipse $E := \{(x, y) \,|\, Q(x, y) = 8\}$ und skizzieren Sie E.

(G 3) Bilinearformen
Eine Abbildung $B(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt bilinear, die für festes y die Zuordnung $x \mapsto B(x, y)$ linear ist und für x die Zuordnung $y \mapsto B(x, y)$ linear ist.

a) Sei $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Abbildungen sind bilinear?
$$B_1(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 \quad , \quad B_2(x, y) = x_1x_2 + y_1y_2$$
$$B_3(x, y) = x_1y_2 + 4x_2y_1 \quad , \quad B_4(x, y) = x_1 + y_1 .$$

b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass $B(x, y) := \langle Ax, y\rangle$ eine Bilinearform ist.

c) Sei B eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Matrix A gibt mit $B(x, y) = \langle Ax, y\rangle$. Ermitteln Sie diese Matrix A speziell für die Bilinearformen aus a).

(G 4) Komplexes Skalarprodukt
Für zwei komplexe Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ erklären wir $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$ wobei $\overline{x}_i$ die komplexe Konjugation von x_i ist. Zeigen Sie folgende Eigenschaften

a) Linearität in der zweiten Komponente: $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x, z\rangle$ für $x, y, z \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

b) Hermitescher Charakter: $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$,

c) Positive Definitheit: $\langle x, x\rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$.

(H 1) Diagonalisierbarkeit von Matrizen
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ 18 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und ermitteln Sie entsprechende Matrizen C und D mit $C^{-1}AC = D$.

(H 2) Hauptachsentransformation
Gegeben sei die quadratische Form

$$Q(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 \; .$$

a) Ermitteln Sie eine symmetrische 2×2-Matrix A, sodass $\langle Av, v \rangle = Q(v)$ gilt mit $v = (x, y)$.

b) Ermitteln Sie die Hauptachsen der Ellipse $E := \{(x, y) \,|\, Q(x, y) = 64\}$ und skizzieren Sie E.

(H 3) Quadratische Formen
Durch eine gegebene Bilinearform $B(x, y)$ erklären wir eine quadratische Form $Q(x) := B(x, x)$.
Zeigen Sie: Es existiert eine symmetrische Matrix A mit der Eigenschaft $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$.

(H 4) Eigenwerte hermitescher Matrizen
Eine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, wenn $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt. Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das in (G 4) erklärte Skalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass alle komplexen Eigenwerte einer hermiteschen Matrix in den reellen Zahlen liegen.

b) Zeigen Sie, dass eine reelle, symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hermitesch ist.
Bemerkung: Somit besitzt eine reelle, symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte.