(G 1) Eigenwerte und Eigenvektoren einer komplexen Matrix
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3-4i & 2-4i \\ -3+6i & -2+6i \end{pmatrix}$$

mit Einträgen in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
Ermitteln Sie alle komplexen Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.

(G 2) Affine Abhängigkeit und Radon-Partition
Im $\mathbb{R}^4$ seien sechs Punkte gegeben

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Punkte $v_1, \dots, v_6$ affin abhängig sind. Ermitteln Sie dazu $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$, von denen mindestens eines ungleich null ist, sodass $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 0$ ist und $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i v_i = 0$ gilt.

b) Ermitteln Sie die Mengen $M^+ = \{v_i \mid \lambda_i > 0\}$ sowie $M^- = \{v_i \mid \lambda_i < 0\}$. Diese Zerlegung wird Radon-Partition genannt.

c) Berechnen Sie

$$r = \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,6\} \\ \lambda_i > 0}} \lambda_i \quad \text{sowie} \quad v = \frac{1}{r} \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,6\} \\ \lambda_i > 0}} \lambda_i v_i$$

und zeigen Sie, dass v in den konvexen Hüllen von sowohl M^+ als auch von M^- liegt.

(G 3) Eigenwerte positiv definiter Matrizen
Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix.

a) A heißt positiv semi-definit, wenn $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie $\lambda \geq 0$ für jeden reellen Eigenwert einer positiv semi-definiten Matrix.

b) A heißt positiv definit, wenn $\langle Ax, x \rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie $\lambda > 0$ für jeden reellen Eigenwert einer positiv definiten Matrix.

(G 4) Orthogonale Matrizen
Eine reelle $n \times n$-Matrix A heißt orthogonal, wenn $A^T A = E$ gilt, oder dazu äquivalent, wenn $A^T = A^{-1}$.

a) Zeigen Sie zunächst für beliebige Matrizen A, dass $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.
Folgern Sie daraus $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und eine orthogonale Matrix A.

b) Zeigen Sie: Die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix stehen paarweise senkrecht aufeinander und haben Länge 1.
Bemerkung: Die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix bilden somit eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

c) Folgern Sie aus a): ± 1 sind die einzigmöglichen reellen Eigenwerte einer orthogonalen Matrix.

(H 1) Eigenwerte und Eigenvektoren einer komplexen Matrix
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3+i & -6 \\ 0 & 2 & 4+i \end{pmatrix}$$

mit Einträgen in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
Ermitteln Sie alle komplexen Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.

(H 2) Eigenwerte von symmetrischen Matrizen
Zu $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine beliebige, symmetrische 2×2-Matrix. Geben Sie deren Eigenwerte in Abhängigkeit von a, b und c an und zeigen Sie, dass die Eigenwerte stets reelle Zahlen sind.

(H 3) Eigenvektoren symmetrischer Matrizen
Es sei A eine symmetrische Matrix, also $A^T = A$.
Zeigen Sie: Zwei Eigenvektoren von A zu unterschiedlichen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

(H 4) Satz von Cayley-Hamilton für diagonalisierbare Matrizen
Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Diese besitze die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sowie die dazugehörigen, linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$. Zeigen Sie, dass A eine Nullstelle seines eigenen charakteristischen Polynomes ist, d.h. zeigen Sie

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0 = 0$$

wenn $p(t) = \det(A - tE) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ das charakteristische Polynom von A ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor im Kern der Matrix $a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0$ liegt.