(G 1) Eigenwerte und Eigenvektoren
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Welche der Vektoren b_1 bis b_4 sind Eigenvektoren der Matrix A?
Was sind die zugehörigen Eigenwerte?

(G 2) Eigenwerte und Eigenvektoren
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(t) = \det(A - tE)$.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynomes.

c) Bestimmen Sie nun zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

(G 3) Eigenwerte und Eigenvektoren
Zeigen Sie folgendes

a) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^k ein Eigenwert von A^k für $k \in \mathbb{N}$.

b) Ist λ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix A, so folgt $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist Eigenwert von A^{-1}.

c) Zwei zueinander ähnliche Matrizen A und B besitzen dasselbe charakteristische Polynom und folglich auch dieselben Eigenwerte.
Hinweis: A und B heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt mit $B = C^{-1}AC$.

(G 4) Eigenschaften des charakteristischen Polynomes
Es sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix, $p(t) = \det(A - tE)$ das charakteristische Polynom sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sämtliche Eigenwerte.

a) Zeigen Sie $p(t) = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$.
Hinweis: Wenn ein Polynom k-ten Grades $q(t)$ eine Nullstelle λ besitzt, so existiert ein Polynom $r(t)$ vom Grade $k - 1$ mit $q(t) = (\lambda - t)r(t)$ (Polynomdivision).

b) Folgern Sie $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ und überprüfen Sie diese Gleichung für die Matrix A aus (G 2).

(H 1) Eigenwerte und Eigenvektoren
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynomes.
Hinweis: Raten Sie eine Nullstelle und berechnen Sie die anderen durch Polynomdivision.

c) Bestimmen Sie nun zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

(H 2) Eigenwerte und Eigenvektoren
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ c & 4 & 2 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

mit Parametern $b, c \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von b und c ist $(2, 2, -1)$ ein Eigenvektor der Matrix A? Berechnen Sie in diesem Fall auch die anderen Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(H 3) Satz von Cayley-Hamilton für 2×2-Matrizen
Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige 2×2-Matrix. Zeigen Sie (durch explizites Nachrechnen) folgende Formel

$$A^2 - \mathrm{spur}(A)A + (\det A)E = 0 ,$$

wobei E die Einheitsmatrix und $\mathrm{spur}A = a + d$ erklärt ist.

(H 4) Nilpotente Matrix
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine nilpotente Matrix, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Zeigen Sie, dass A nur die Null als Eigenwert besitzt.