(G 1) Determinantenberechnung
Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen durch Entwicklung nach einer passenden Zeile oder Spalte

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & \pi \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie nun die Determinanten von A^2, B^2, BC und D^2. Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

(G 2) Eigenschaften der Determinanten
Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen im Körper $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Falls alle Einträge der Matrix ganze Zahlen sind, so ist die Determinante ganzzahlig. Falls alle Einträge aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind, so auch die Determinante.

b) Finden Sie eine Matrix, deren Einträge alle positiv sind während die Determinante negativ ist.

c) Finden Sie Matrizen A und B, sodass $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ gilt.

(G 3) Effizientes Berechnen der Determinante
Wir wollen eine einfache Möglichkeit angeben, um eine Determinante zu berechnen.

a) Es sei $D = (d_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $d_{ij} = 0$ für $i > j$. Zeigen Sie, dass ihre Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist, also $\det D = d_{11} \cdot \ldots \cdot d_{nn}$.

b) Berechnen Sie nun die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

indem Sie die Matrix mittels Gauss-Algorithmus in eine Dreiecksmatrix umformen und *a*) anwenden. *Hinweis:* Bei Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert sich die Determinante nicht. Bei Zeilentausch wechselt sie das Vorzeichen.

(G 4) Eigenschaften der Determinanten
Verwenden Sie den Produktsatz $\det(AB) = \det A \det B$, um folgende Regeln für Determinanten zu beweisen:

a) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, falls $\det A \neq 0$, wobei A^{-1} die Inverse von A ist,

b) $\det(A^n) = (\det A)^n$, für $n \in \mathbb{N}$ und, falls $\det A \neq 0$, auch für $n \in \mathbb{Z}$,

c) $\det A = \det B$ für zwei zueinander ähnliche Matrizen A und B.
Hinweis: A und B heißen zueinander ähnlich, falls eine invertierbare Matrix C existiert mit $B = C^{-1}AC$.

(H 1) Matrix mit Parameter
Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \\ 2 & 1 & 3 \\ c & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Dimensionen von Kern und Bild von A in Abhängigkeit von c.

(H 2) Schiefsymmetrische Matrix
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt eine $n \times n$-Matrix A mit Einträgen in $\mathbb{R}$ schiefsymmetrisch, falls $A^t = -A$.

a) Zeigen Sie $a_{ii} = 0$ für die Diagonalelemente einer schiefsymmetrischen Matrix A.

a) Zeigen Sie: Falls A schiefsymmetrisch und n ungerade, so ist $\det A = 0$.

b) Finden Sie für gerades n ein Beispiel eine schiefsymmetrischen Matrix A mit $\det A \neq 0$.

(H 3) Van de Mond-Determinante
Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \ .$$

Hinweis zum Induktionsschritt: Erzeugen Sie zunächst in der ersten Zeile an der zweiten bis n-ten Stelle eine Null, indem Sie ein geeignetes Vielfaches der $k-1$-ten Spalte von der k-ten Spalte abziehen, beginnend mit $k = n$ bis $k = 2$. Entwickeln Sie dann nach der ersten Zeile und verwenden Sie die Induktionsvoraussetzung.

(H 4) Produktsatz bei 2×2-Matrizen
Es seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ zwei 2×2-Matrizen. Zeigen Sie (durch direktes Nachrechnen), dass $\det(AB) = \det A \det B$ gilt.