(G 1) Basisergänzung I
Gegeben sei die Basis $\alpha = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ eines vierdimensionalen Vektorraumes sowie die Menge von Vektoren $\beta = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, erklärt durch $b_1 := a_1 + a_2$, $b_2 := a_2 + a_3$, $b_3 := a_1 - a_4$, $b_4 := -a_3 + a_4$.

a) Ergänzen Sie $\{a_1, a_2\}$ durch zwei Vektoren aus β zu einer Basis.

b) Ergänzen Sie $\{b_1, b_2\}$ durch zwei Vektoren aus α zu einer Basis.

c) Zeigen Sie a_3, b_3, b_4 und a_1, a_3, a_4 denselben Untervektorraum aufspannen.

(G 2) Direkte Summe
Es seien $U \subset W$, $V \subset W$ zwei Untervektorräume von W. Dann nennen wir W die direkte Summe von U und V falls sowohl $W = U + V = \{u + v \,|\, u \in U\,,\ v \in V\}$ als auch $U \cap V = \{0\}$ gilt. Wir schreiben dann $W = U \oplus V$.

a) Zeigen Sie: Falls W endlichdimensional und $W = U \oplus V$ ist, so gilt $\dim W = \dim U + \dim V$.

b) Beweisen Sie: Zu jedem $w \in W$ gibt es eindeutig bestimmte $u \in U$ und $v \in V$ mit $w = u + v$.

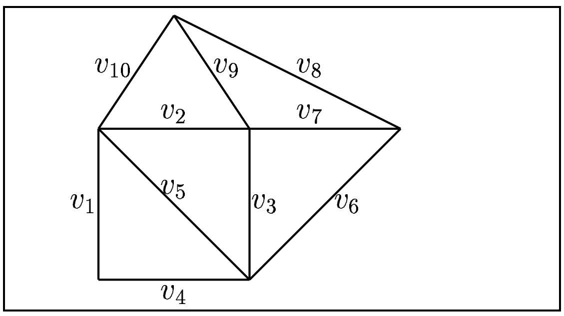
c) Sei W endlichdimensional und $U \subset W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Dann gibt einen Untervektorraum V mit der Eigenschaft $W = U \oplus V$.

(G 3) Untervektorräume
Es seien U_1, U_2 und U_3 drei Untervektorräume. Beweisen Sie die Inklusion

$$U_1 \cap U_3 + U_2 \cap U_3 \subset (U_1 + U_2) \cap U_3\ .$$

Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass diese Mengen im Allgemeinen nicht gleich sind.

(G 4) Basisergänzung II
Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen. Jede Kante des Graphen repräsentiert einen Vektor $v_1, ..., v_{10}$ eines Vektorraumes. Eine Menge von Vektoren sei linear abhängig, falls die zugehörigen Kanten im Graphen einen Kreis enthalten, ansonsten sei die Menge linear unabhängig.
Beispiel: v_1, v_4, v_{10} sind linear unabhängig während v_1, v_3, v_4, v_5 linear abhängig sind.
Finden Sie eine Basis α des Vektorraumes, welche den Vektor v_1 enthält. Finden Sie eine Basis β des Vektorraumes, welche den Vektor v_1 nicht enthält.



(H 1) Projektionen
Eine lineare Abbildung $\varphi : W \to W$ heißt Projektion, falls $\varphi(\varphi(w)) = \varphi(w)$ für alle $w \in W$ gilt.
Zeigen Sie: Für eine Projektion φ gilt die direkte Summe $\mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi) = W$.
Hinweis: Beachten Sie $w = w - \varphi(w) + \varphi(w)$.

(H 2) Fortsetzung von linearen Abbildungen
Es sei W ein Vektorraum, $U \subset W$ ein Untervektorraum und $\varphi : U \to W$ eine lineare Abbildung.

a) Sei W endlichdimensional. Zeigen Sie, dass es dann eine lineare Fortsetzung von φ auf W gibt, d.h. es existiert eine lineare Abbildung $\psi : W \to W$ mit $\psi(w) = \varphi(w)$ für alle $w \in U$.

b*) Gilt *a)* auch wenn W nicht endlichdimensional ist?

(H 3) Untervektorräume
Es seien U_1, U_2 und U_3 drei Untervektorräume und es gelte $U_1 \subset U_3$. Zeigen Sie, dass dann

$$U_1 \cap U_3 + U_2 \cap U_3 = (U_1 + U_2) \cap U_3$$

gilt.