(G 1) Lineare Abbildungen
Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, x) = (x + y, x + z, y - z)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x^2, y^2, x - y)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y, z) = (x - y, x - z, 2x + y, z)$

d) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = (0, x, 2x)$

Geben Sie bei den linearen Abbildungen jeweils Kern, Bild und deren Dimensionen an.

(G 2) Matrizen
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Summen $A + B$, $A + C$ und $B + C$.

b) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Matrizenprodukte A^2, AB, BA, $B^T A$ und B^2.

c) Vergleichen Sie die Matrizen AB und $B^T A$. Was fällt Ihnen auf?

(G 3) Lineare Gleichungssysteme
Ermitteln Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_2 + x_3 &= 8 \; . \end{aligned}$$

(G 4) Rang einer Matrix bei unterschiedlichen Körpern
Über einem Körper K sei die Matrix $A \in K^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie den Rang von A für den Körper $K = \mathbb{Q}$.

b) Berechnen Sie den Rang von A für den Körper $K = \mathbb{Z}_5$.

c) Wie erklären Sie sich die unterschiedlichen Ergebnisse aus a) und b)?

(H 1) Lineare Abbildungen
Es seien $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ und $v_4 = (3,2,1)$. Weiter sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = (2,1,2)$, $\varphi(v_2) = (1,2,1)$ und $\varphi(v_3) = (3,2,1)$.

a) Ermitteln Sie die Dimensionen von Kern und Bild von φ.

b) Berechnen Sie $\varphi(v_4)$.

c) Ermitteln Sie einen Vektor v mit $\varphi(v) = (0,1,2)$.

(H 2) Matrix mit Parameter
Für $a \in \mathbb{R}$ sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

erklärt. Geben Sie in Abhängigkeit von a Kern und Bild von A und deren Dimensionen an.

(H 3) Lineare Abbildungen
Es seien V und W zwei Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_k \in V$ Vektoren.

a) Zeigen Sie: Wenn $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ linear unabhängig sind, so sind es auch $v_1, \ldots, v_k$.

b) Sei nun $V = W$ und $\varphi : V \to V$ bijektiv. Zeigen Sie: Wenn $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind, so sind es auch $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$.

(H 4) Potenzen einer Matrix
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

b) Bestimmen Sie nun die Potenz A^n für eine beliebige, natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.