(G 1) Lineare Unabhängigkeit und Linearkombination
Gegeben sind die vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

b) Stellen Sie v_4 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 dar.

(G 2) Untervektorräume, Dimension und Basis
Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume vom $\mathbb{R}^4$? Ermitteln Sie gegebenenfalls die Dimension des Untervektorraumes sowie eine Basis.

a) $U_1 := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$,

b) $U_2 := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$,

c) $U_3 := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy + zw = 0\}$,

d) $U_4 := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + z^2 = 0\}$.

(G 3) Lineare Unabhängigkeit
Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren u_1, u_2 und u_3 eines Vektorraumes. Überlegen Sie sich, ob dann auch folgende drei Vektoren linear unabhängig sind?

a) v_1, v_2 und v_3, wobei $v_1 := u_1 + u_2$, $v_2 := u_1 + u_3$ und $v_3 := u_2 - u_3$,

b) w_1, w_2 und w_3, wobei $w_1 := u_1$, $w_2 := u_1 + u_2$ und $w_3 := u_1 + u_2 + u_3$.

(G 4) Untervektorräume
Es sei W ein Vektoraum und $U \subset W$, $V \subset W$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie, dass dann auch folgende Teilmengen Untervektorräume bilden:

a) der Durchschnitt $U \cap V := \{w \in W \mid w \in U \text{ und } w \in V\}$,

b) die Summe $U + V := \{u + v \in W \mid u \in U \text{ und } v \in V\}$.

(H 1) Lineare Unabhängigkeit und Linearkombination
Gegeben sind die vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 nicht linear unabhängig sind.

b) Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten an, wie sich v_4 als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 darstellen lässt.

(H 2) Vektorraum von Polynomen
Eine Funktion $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nennen wir ein Polynom vom Grade n. Die Menge aller Polynome

$$P_n := \{p \mid p \text{ ist Polynom vom Grade } n\}$$

bildet einen Vektorraum. Zeigen Sie, dass P_n die Dimension $n+1$ besitzt und geben Sie eine Basis dieses Vektorraumes an. Seien weiter $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$V := \{p \in P_n \mid p(x_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, k\}$$

einen Untervektorraum von P_n bildet.

(H 3) Kreuzprodukt von Vektorräumen
Zu zwei Vektorräumen U und V über dem Körper $\mathbb{R}$ erklären wir deren Kreuzprodukt

$$U \times V := \{(u, v) \mid u \in U\ ,\ v \in V\}$$

sowie Addition und skalare Multiplikation

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \quad \text{und} \quad r(u_1, v_1) := (ru_1, rv_1)$$

für $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$ und $r \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass damit $U \times V$ zu einem Vektorraum wird, indem Sie mindestens zwei der Vektorraumaxiome überprüfen.

b) Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von U und $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V. Geben Sie damit eine Basis von $U \times V$ an und zeigen Sie, dass $U \times V$ die Dimension $m + n$ besitzt.