(1) Gruppe mit vier Elementen
Es sei $G = \{e, a, b, c\}$ eine Gruppe mit vier Elementen und e das neutrale Element. Wir wollen alle solche Gruppen angeben.

a) Es gelte $x^2 = e$ für alle Elemente $x \in G$. Zeigen Sie, dass es genau eine solche Gruppe G gibt, indem Sie die Multiplikationstafel der Gruppe angeben.

b) Nun gelte $a^2 = b$. Zeigen Sie ebenfalls, dass es genau eine solche Gruppe G gibt, indem Sie die Multiplikationstafel der Gruppe angeben.

c) Warum sind die Gruppen aus a) und b) nicht isomorph zueinander?

Bemerkung: Somit gibt es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen mit vier Elementen.

(2) Symmetriegruppe des Würfels
Es sei $W = [-1, 1]^3$ der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$ mit seinen acht Ecken $E = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \{-1, 1\}\}$ und G die Symmetriegruppe des Würfels W.

a) Überlegen Sie sich die Inklusion $G \subset S_8$, wobei S_8 die Permutationsgruppe der Menge E ist.

b) Zeigen Sie für jedes Element $\varphi \in G$ die Eigenschaft $(*)$: Wenn vier Punkte $p_1, \ldots, p_4 \in E$ in einer Ebene liegen, so liegen auch deren Bildpunkte $\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_4)$ in einer Ebene.

c) Finden Sie ein Element $\varphi \in S_8$, welches nicht in G liegt aber ebenfalls die Eigenschaft $(*)$ besitzt.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\varphi(1, y, z) = (1, y, z)$ gilt. Wie ist nun $\varphi(-1, y, z)$ zu definieren?

(3) Symmetrische Polynome
Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ heißt symmetrisch, wenn

$$p(x_1, \ldots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

für eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass die Summe und das Produkt zweier symmetrischer Polynome wieder ein symmetrisches Polynom ist. Die symmetrischen Polynome bilden somit einen Ring.

b) Geben Sie jeweils drei symmetrische Polynome mit $n = 2$ und $n = 3$ Variablen an.

c) Für $k = 0, \ldots, n$ erklären $n + 1$ verschiedene, elementarsymmetrische Polynome durch

$$p_k(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} \quad \text{für } k \ge 1 \quad , \quad p_0(x) = 1 \, .$$

Wie sehen diese für $n = 3$ explizit aus?

d) Ein Satz besagt, dass man jedes symmetrische Polynom als Summe von Vielfachen von Produkten von elementarsymmetrischen Polynomen darstellen kann. Ermitteln Sie diese Darstellung im Falle von $p(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ mit $n = 2$.

(4) Klausurähnliche Aufgabe
Gegeben sei die Gerade g durch die Punkte $(1, 0, 1)$ und $(2, 3, 2)$ sowie die Gerade h als Lösungsmenge der beiden Gleichungen $x + y + z = 3$ und $2x + y + z = 1$.
Zeigen Sie, dass die Geraden windschief liegen, d.h. weder parallel sind noch sich schneiden.
Es seien $P \in g$ und $Q \in h$ die beiden Punkte in g und h, welche minimalen Abstand zueinander haben. Überprüfen Sie, ob die Gerade durch P und Q ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(5) Klausurähnliche Aufgabe
Ermitteln Sie eine 3×3-Matrix, welche die Eigenwerte $1, 2$ und 3 besitzt sowie einen Eigenvektor $(1, 1, 1)$.

(6) Klausurähnliche Aufgabe
Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler Ihrer Matrikelnummer mit 30 (ohne Taschenrechner).

(7) Klausurähnliche Aufgabe
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & s & 2 \\ s & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $v = (2, 3, 1)^T$. Für welche Werte von s besitzt das Gleichungssystem $Ax = v$ genau eine Lösung x?

(8) Klausurähnliche Aufgabe
Gegeben seien $v_1 = (2, 1, 2)$ und $v_2 = (5, 7, -1)$. Ermitteln Sie, welche der Vektoren $v_3 = (3, 4, 1)$ und $v_4 = (3, 6, -3)$ in der konvexen, affinen oder linearen Hülle von v_1 und v_2 liegen.

(9) Klausurähnliche Aufgabe
Ermitteln Sie die Lösung $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ des Gleichungssystemes $(1 + i)x - y = i$ und $3x + iy = 2 - i$.