(G 1) Homomorphiesatz
Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ zusammen mit der Multiplikation komplexer Zahlen und

$$f_1(z) = \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad f_2(z) = |z| \; .$$

a) Zeigen Sie, dass $f_i : G \to G$ Gruppenhomomorphismen sind.

b) Ermitteln Sie Kern und Bild von f_i und überlegen Sie sich, dass diese jeweils Untergruppen von G sind.

Bemerkung: Wegen des Homomorphiesatzes sind die Gruppen $U/\text{Kern}(f_i)$ und $\text{Bild}(f_i)$ isomorph.

(G 2) Ringe
Eine Menge R mit Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ heißt Ring, falls:
(1) $(R, +)$ eine kommutative Gruppe ist,
(2) die Multiplikation assoziativ ist, $(xy)z = x(yz)$,
(3) die Distributivgesetze gelten $(x + y)z = xz + yz$, $z(x + y) = zx + zy$.

a) Überlegen Sie sich, dass folgende Mengen mit der üblichen Addition und Multiplikation Ringe sind: $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z} := \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, der Polynomring $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{n\times n}$ = die Menge aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$, $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

b) Welche der Ringe aus a) besitzen ein neutrales Element e bez. Multiplikation?

c) Welche der Ringe sind kommutativ, d.h. $xy = yx$ für alle $x, y \in R$?

d) Welche der Ringe sind nullteilerfrei, d.h. aus $x, y \in R$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$ folgt schon $xy \neq 0$.

(G 3) Ideale in Ringen
Eine Teilmenge $I \subset R$ mit $I \neq \emptyset$ eines kommutativen Ringes R heißt Ideal, wenn gilt:
(1) mit $x, y \in I$ ist $x + y \in I$,
(2) mit $x \in R$ und $y \in I$ ist $xy \in I$.

a) Zeigen Sie $0 \in I$ für jedes Ideal I.

b) Zeigen Sie, dass für ein festes Element $x \in R$ die Menge $I = (x) := \{yx \mid y \in R\}$ aller Vielfachen von x ein Ideal ist. Man nennt I das von x erzeugte Ideal.

c) Geben Sie alle Ideale im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen an.

d) Sei I eine festes Ideal eines Ringes. Wir erklären auf R eine Relation: $x \sim y$ gilt genau dann, wenn $y - x \in I$ ist. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation und bezüglich Addition sowie Multiplikation eine Kongruenzrelation ist.
Bemerkung: Man kann also den Quotienten R/I bilden, welchen wir als den Quotientenring bezeichnen.

(H 1) Homomorphiesatz
Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen sowie $f : G \to G$, $f(z) = z^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist.

b) Ermitteln Sie die Untergruppe $H := \mathrm{kern}(f)$.

c) Zeigen Sie, dass die Quotientengruppe G/H isomorph zu G ist.

(H 2) Der Ring $\mathbb{Z}[i]$
Die Menge $R := \mathbb{Z}[i] = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ wird mit der üblichen Addition und Multiplikation aus den komplexen Zahlen zu einem Ring. Ermitteln Sie in diesem Ring den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von $a = 9 + 7i$ und $b = 11 + 13i$.
Hinweis: Ermitteln Sie zunächst $d = ggT(|a|^2, |b|^2)$ in $\mathbb{Z}$.

(H 3) Ring
Auf $\mathbb{R}^2$ erklären wir eine Addition sowie Multiplikation durch

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \quad \text{und} \quad (x, y) \cdot (x', y') := (xx', yy') \; .$$

Zeigen Sie, dass damit $\mathbb{R}^2$ zu einem Ring wird. Ist es sogar ein Körper?

(H 4) Isomorphe Körper
Im Polynomring $\mathbb{R}[x]$ betrachten wir das vom Polynom $x^2 + 1$ erzeugte Ideal $I = (x^2 + 1)$. Wie in (G 3) d) gezeigt, lässt sich der Quotientenring $\mathbb{R}[x]/I$ bilden. Wir wollen zeigen, dass dieser Quotientenring isomorph ist zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse $[p]$ eines Polynomes p genau ein lineares Polynom $q(x) = a + bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ enthält.

b) Zeigen Sie nun, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}[x]/I$, $f(a + ib) := [a + bx]$ bijektiv ist und ein Homomorphismus, d.h.

$$f(z + z') = f(z) + f(z') \quad , \quad f(zz') = f(z)f(z') \quad \text{für } z, z' \in \mathbb{C} \; .$$

Damit ist f ein Ringisomorphismus.

Bemerkung: Es ist also möglich, die komplexen Zahlen als den Quotienten $\mathbb{R}[x]/I$ zu definieren.