(G 1) Polynomring
Zur Wiederholung: Ein Polynom vom Grade $\deg(f) = n$, $n = 0, 1, \ldots$ ist eine Funktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, wobei $a_n \neq 0$. Ein Polynom f heißt konstant, wenn $\deg(f) = 0$. Wir sagen f teilt g, geschrieben $f|g$, wenn ein Polynom h existiert mit $g = fh$.

a) Seien f und g zwei von Null verschiedene Polynome. Zeigen Sie $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$. Folgern Sie daraus: Ist das Produkt fg zweier Polynome konstant, so müssen sowohl f als auch g konstant sein.

b) Zeigen Sie: Falls $f|g$ und $g|f$ gilt, so existiert ein konstantes Polynom c mit $g = fc$.

c) Folgern Sie aus *b*): Der größte gemeinsame Teiler $ggT(f, g)$ zweier Polynome f und g ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Konstanten.

(G 2) Nullstellenberechnung, ggT und kgV
Gegeben seien die beiden Polynome

$$p(x) = x^3 + 4x^2 + 3x \quad \text{sowie} \quad q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2\,.$$

a) Berechnen Sie die sämtliche Nullstellen beider Polynome sowie deren Zerlegung in Linearfaktoren.

b) Ermitteln Sie damit den größten gemeinsamen Teiler sowie das kleinste gemeinsame Vielfache von f und g.

(G 3) Euklidischer Algorithmus und ggT
Gegeben seien die beiden Polynome

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x - 4 \quad \text{und} \quad q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 2\,.$$

Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler von p und q mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

(G 4) Äquivalenzrelation
Es sei r ein festes Polynom. Wir erklären eine Relation zwischen Polynomen: Es gilt $p \sim q$ genau dann, wenn $r|(p-q)$, also $p \sim q$ genau dann, wenn ein Polynom h existiert mit $rh = p - q$.
Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(H 1) Komplexe Nullstellen
Es sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle von p, so ist auch das komplex konjugierte $\overline{z}$ eine Nullstelle von p.

(H 2) Nullstellen von Polynomen, ggT und kgV
Ermitteln Sie die Linearfaktorzerlegung der Polynome

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 10x \quad \text{und} \quad q(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 25$$

sowie deren größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache.

(H 3) Berechnung einer doppelten Nullstelle
Falls ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ eine doppelte Nullstelle besitzt, so erhält man diese auch als Nullstelle des größten gemeinsamen Teilers von p mit seiner Ableitung $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Verwenden Sie dies, um die doppelte Nullstelle des Polynomes

$$p(x) = 4x^4 - 8x^3 + x^2 - 3x + 9$$

zu berechnen.

(H 4) Äquivalenzrelation
Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation aus (G 4) und $[p]$ die Äquivalenzklasse eines Polynomes p. Auf den Äquivalenzklassen wollen wir eine Addition sowie Multiplikation definieren durch

$$[p] + [q] := [p + q] \quad \text{und} \quad [p] \cdot [q] := [p \cdot q] \; ,$$

wobei p, q Polynome sind. Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist.
Bemerkung: Mit dieser Addition und Multiplikation wird der Quotientenraum zu einem Ring, den man den Quotientenring nennt.