(G 1) Gruppen

Zur Wiederholung: Eine Menge G mit einer Verknüpfungsoperation $\cdot$ heißt Gruppe, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:
1.) Assoziativität: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in G$,
2.) neutrales Element: Es existiert ein $e \in G$ mit $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in G$,
3.) inverses Element: Zu jedem $x \in G$ existiert genau ein Inverses $x^{-1} \in G$ mit $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

a) Eine Gruppe heißt kommutativ, wenn $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in G$ gilt. Geben Sie einige Beispiele von kommutativen Gruppen sowie von nicht kommutativen Gruppen an.

b) Eine Teilmenge $G' \subset G$ einer Gruppe heißt Untergruppe von G, wenn folgende Eigenschaften gelten: $e \in G'$, mit $x, y \in G'$ ist auch $x \cdot y \in G'$ und mit $x \in G'$ ist auch $x^{-1} \in G'$. Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ bez. Multiplikation?

$$M_1 := \{\sqrt{x} : x \in \mathbb{Q} \,,\, x > 0\} \quad , \quad M_2 := \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad , \quad M_3 := \{x \in \mathbb{C} \,:\, |x| = 1\}$$

$$M_4 := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{1}{2} < |x| < 2\} \quad , \quad M_5 := \{x + \sqrt{3}y \,:\, x, y \in \mathbb{Q} \,,\, x^2 + y^2 > 0\}$$

(G 2) Gruppenhomomorphismen

Eine Abbildung $f : G \to G'$ von einer Gruppe G in eine Gruppe G' heißt Homomorphismus, wenn $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in G$ gilt.

a) Sei e das neutrale Element in G und e' dasjenige in G'. Zeigen Sie $f(e) = e'$.

b) Zeigen Sie $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ sowie $f(x^n) = f(x)^n$ für alle $x \in G$ sowie $n \in \mathbb{N}$.

c) Sei G die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ zusammen mit der Matrizenmultiplikation und $G' = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zusammen mit der Multiplikation. Überlegen Sie sich, dass die Determinante $\det : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(G 3) Äquivalenzrelation und Quotientengruppe

Es sei G eine kommutative Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir erklären auf $G \times G$ eine Relation $\sim$: Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $x^{-1}y \in H$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h. zeigen Sie:
1.) Reflexivität: $x \sim x$ für alle $x \in G$,
2.) Symmetrie: Wenn $x \sim y$, so ist auch $y \sim x$,
3.) Transitivität: Wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ gilt, so auch $x \sim z$.

b) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenzrelation ist, d.h. zeigen Sie folgendes: Wenn $x \sim x'$ und $y \sim y'$, so ist auch $x \cdot y \sim x' \cdot y'$.

c) Mit $[x] := \{y \in G \,|\, y \sim x\}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von $x \in G$. Auf der Menge $G/H := \{[x] \,|\, x \in G\}$ aller Äquivalenzklassen erklären wir folgende Operation

$$[x] \cdot [y] := [x \cdot y] \quad \text{für } [x], [y] \in G/H \;.$$

Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl von $x, y \in G$ ist.
Bemerkung: Mit dieser Operation wird G/H zu einer Gruppe, welche man die Quotientengruppe nennt.

(H 1) Untergruppen
Es sei G eine Gruppe, $x \in G$ und $H := \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller ganzzahligen Potenzen von x. Zeigen Sie, dass H eine kommutative Untergruppe von G ist.

(H 2) Homomorphismen
Wir betrachten die Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Addition.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = mx$ ein Homomorphismus ist.

b) Für welche Werte von m ist dies sogar ein Isomorphismus d.h. ein bijektiver Homomorphismus?

c) Gibt es noch weitere Homorphismen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ außer den in a) angegebenen?

(H 3) Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$
Zu einem $n \in \mathbb{N}$ erklären wir $G := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, die Menge aller n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass G bez. der Multiplikation von komplexen Zahlen eine Untergruppe von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist. Wieviele Elemente enthält G? Skizzieren Sie G im Falle $n = 8$.

(H 4) Äquivalenzrelation, Mächtigkeit von Mengen
Es sei M eine Menge und $P(M) := \{A \mid A \subset M\}$ ihre Potenzmenge. Auf $P(M)$ erklären wir folgende Relation $\sim$: Es gelte $A \sim B$ genau dann, wenn eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ existiert.
Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.