Auf diesem Übungsblatt finden Sie zur Wiederholung einige Aufgaben zu bis jetzt in der Vorlesung behandelten Themen. Ähnliche Aufgaben können auch auf der Klausur erscheinen.

(1) Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
Es seien $a_1, a_2, a_3$ drei lineare unabhängige Vektoren. Entscheiden Sie, ob $b_1, b_2, b_3$ ebenfalls linear unabhängig sind, wobei

a) $b_1 := a_1 + a_2$, $b_2 := a_1 - a_2$, $b_3 := a_1 + a_2 + a_3$,

b) $b_1 := a_1 - a_2$, $b_2 := a_1 + a_3$, $b_3 := -3a_1 + a_2 - 2a_3$.

(2) Geraden im Raum
Gegeben sind zwei Geraden im Raum durch ihre Parameterdarstellung

$$g_t := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad , \quad h_t := \left\{ \mu \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; : \; \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Für welchen Wert von $t$ schneiden sich die beiden Geraden? Was ist dann der Schnittpunkt?

(3) Untervektorräume
Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Ermitteln Sie gegebenenfalls die Dimension des Untervektorraumes.

(4) Lineare Abbildungen
Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Ermitteln Sie gegebenenfalls auch Kern und Bild.

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (xy, xz, z)$,

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, x + 3y + 2z)$

(5) affine Untervektorräume
Sei $W$ ein Vektorraum, $V \subset W$ ein Untervektorraum sowie $V + y := \{x + y \mid x \in V\}$ für ein $y \in W$.
Zeigen Sie, dass $V + y$ einer affiner Unterraum ist. Für welche $y$ ist $V + y$ sogar ein Untervektorraum?

(6) Direkte Summe und Senkrechtraum
Sei $W$ ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $U \subset W$ ein Untervektorraum und $U^\perp := \{w \in W \mid \langle w, u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ der Senkrechtraum. Zeigen Sie die Darstellung als direkte Summe $W = U \oplus U^\perp$.

(7) Determinante von Matrizen
Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & s & 0 \\ s & 1 & s \\ 0 & s & 2 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie $\det A$ und bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild von $A$ in Abhängigkeit von $s$.

(8) Eigenwerte von schiefsymmetrischen Matrizen
Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller Eigenwert einer schiefsymmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass daraus $\lambda = 0$ folgt.

(9) Diagonalisierbarkeit von Matrizen

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ 36 & -7 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist. Ermitteln Sie dazu Matrizen $C$ und $D$ mit $C^{-1}AC = D$.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!