

(G 1) Rechnen mit komplexen Zahlen

Ermitteln Sie Real- und Imaginärteil, Betrag sowie Argument von

$$z_1 = (1 + 2i)^{-1}(3 + i) \quad , \quad z_2 = 32e^{\frac{1}{6}\pi i} - (2e^{\frac{1}{8}\pi i})^4 .$$

(G 2) Gleichungen

Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen.

a)  $z^2 = -5 + 12i$ ,

b)  $z^2 - 6iz + 7 = 0$ ,

c)  $z^3 - 3z^2 + 3z = 1 + 27i$ .

(G 3) Mengen in der komplexen Ebene

Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene.

a)  $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - 1| \leq 3\}$ ,

b)  $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 2\operatorname{Im}(z)\}$ ,

c)  $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = |z + i|\}$ .

(G 4) Komplexe Konjugation

Zu einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  erklären wir die ihre komplex konjugierte Zahl  $\bar{z} := x - iy$ . Beweisen Sie folgende Rechenregeln der komplexen Konjugation

a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,

b)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ,

c)  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$  und  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ .

## (H 1) Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil, den Betrag sowie das Argument von

a)  $z_1 = (1 + i)^3 + \overline{(2 - 2i)}$

b)  $z_2 = 3e^{\frac{3}{4}\pi i} \cdot (2e^{\frac{1}{6}\pi i})^3$

## (H 2) Gleichungen

Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen.

a)  $z^2 + 4z = 2i - 4,$

b)  $z^4 + 2z^2 = 3.$

## (H 3) Rechenregeln bei komplexen Zahlen

Leiten Sie mit Hilfe von (G 4) folgende Regeln her

a)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2,$

b)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$

c)  $|w + z|^2 + |w - z|^2 = 2|w|^2 + 2|z|^2$  . Diese Gleichung wird Parallelogrammgleichung genannt, warum wohl?