(G 1) Lineare Abbildungen
Es sei U ein Vektorraum, z.B. die zweidimensionale Ebene $\mathbb{R}^2$ oder der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$. Eine Abbildung $f : U \to U$ nennt man linear, wenn sie die Linearitätsbedingungen

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{und} \quad f(t\,u) = tf(u)$$

für alle $u, v \in U$ und $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

a) Welche der folgenden Abbildungen ist linear für $U = \mathbb{R}$

$$f_1(x) = x^3 \quad , \quad f_2(x) = 4x \quad , \quad f_3(x) = 2^x \; .$$

b) Einen Punkt $u \in U$ nennt man Fixpunkt von f, wenn $f(u) = u$ gilt. Zeigen Sie, das die Null ein Fixpunkt jeder linearen Abbildung ist.

(G 2) Lineare Abbildungen in der Ebene
Als Beispiele von linearen Abbildungen in der Ebene betrachten wir Drehungen um den Koordinatenursprung, Spiegelungen an Geraden durch den Koordinatenursprung und senkrechte Projektionen auf Geraden durch den Koordinatenursprung.

a) Überlegen Sie sich, dass $f(x,y) = (x,-y)$ eine Spiegelung an der x-Achse liefert, $g(x,y) = (-y,x)$ die Drehung um $90°$ ist und $h(x,y) = (0,y)$ die Projektion auf y-Achse ist.

b) Welche Fixpunkte besitzen Drehungen, Spiegelungen und Projektionen?

c) Überlegen Sie sich, dass die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen in der Ebene eine Drehung ergibt. Wie lässt sich der Drehwinkel dieser Drehung ermitteln?

(G 3) Das Zwergenproblem
In einer Runde von Zwergen hat jeder ein mit einer gewissen Menge Wein gefülltes Glas mit insgesamt 1 Liter Wein. Der erste Zwerg verteilt seinen Inhalt zu gleichen Teilen auf die anderen, danach verteilt der zweite Zwerg seinen Inhalt zu gleichen Teilen an die anderen und so weiter bis der letzte Zwerg seinen Inhalt zu gleichen Teilen an die anderen verteilt. Zufälligerweise hat am Ende jeder genauso viel wie am Anfang. Die Frage lautet: Wieviel hatte jeder Zwerg am Anfang?
Lösen Sie dieses Problem zunächst für den Fall von zwei, danach für den Fall von drei Zwergen.
Überlegen Sie sich nun, was dieses Problem mit linearen Abbildungen zu tun hat und wie man dieses Problem allgemein bei einer beliebigen Anzahl von Zwergen lösen könnte.

(G 4) Ordnung von Abbildungen
Wir betrachten eine Abbildung $f : U \to U$ mit der Eigenschaft $f^k(u) = u$ für alle $u \in U$, wobei f^k die k-fache Hintereinanderausführung der Abbildung f bezeichne. Das kleinstmögliche solche $k \geq 1$ nennen wir die Ordnung $\mathrm{ord}(f)$.

a) Ermitteln Sie die Ordnung von Spiegelungen.

b) Besitzen Projektionen eine Ordnung?

c) Zeigen Sie: Zu jedem $k = 1, 2, ...$ gibt es eine Drehung der Ordnung k.