Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Bokowski
Dr. Bergner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13.3.2007

Klausur

zu **Lineare Algebra I für Mathematik-Lehramt Gymnasium**

Bitte in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen:

Name: .... Vorname: ....

Fachrichtung: .... Matrikelnummer: ....

Versehen Sie bitte alle Blätter mit Ihrem Namen. Legen Sie die Blätter am Schluss der Klausur in dieses Deckblatt ein, und geben Sie sie mit diesem zusammen ab.
Beachten Sie: **Die Lösungswege müssen klar erkennbar sein !**
Als Hilfsmittel sind zugelassen: alle schriftlichen Unterlagen, jedoch **kein** Taschenrechner.

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils eine linear unabhängige Menge von Vektoren, deren lineare Hülle gleich dem gesamten Vektorraum ist, für den Fall

1.1) des Vektorraumes $\mathbb{R}^4$ über dem Körper $\mathbb{R}$,

1.2) des Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ über dem Körper $\mathbb{C}$,

1.3) des Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ über dem Körper $\mathbb{R}$.

Welche der von Ihnen angegebenen Mengen sind Basen des entsprechenden Vektorraumes?

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = \langle x, y\rangle y$, wobei $y = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$ sei.

2.1) Ist f eine lineare Abbildung?

2.2) Ermitteln Sie Kern(f) sowie Bild(f).

2.3) Zeigen Sie, dass $f \circ f(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt.

2.4) Zeigen Sie Kern$(f) \oplus$ Bild$(f) = \mathbb{R}^4$, d.h. die Zerlegung des $\mathbb{R}^4$ in die angegebene direkte Summe.

2.5) Welche geometrische Interpretation besitzt die Abbildung f?

Aufgabe 3 (20 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen folgende mathematische Begriffe erklärt werden:

a) Produkt zweier komplexer Zahlen,

b) Skalarprodukt,

c) Vektor- bzw. Kreuzprodukt,

d) Produkt von Matrizen,

e) Äquivalenzrelation,

f) Primzahlen in Ringen,

g) Homomorphiesatz im Zusammenhang mit Faktorgruppe sowie

h) Produktsatz für Determinanten.

Bearbeiten Sie dazu folgende Aufgabenstellungen:

3.1) Geben Sie für a) bis f) eine formale Definition des Begriffes mit Angabe der beteiligten Objekte. Geben Sie, wenn möglich, auch eine geometrische Interpretation.

3.2) Formulieren Sie bei g) und h) den entsprechenden Satz.

3.3) Geben Sie zu a) bis h) jeweils ein Beispiel an.

3.4) Welchen der Begriffe können Sie mit der Hintereinanderausführung $f \circ g$ zweier linearer Abbildungen $f, g : V \to V$ in Zusammenhang bringen? Dabei sei V ein Vektorraum.

3.5) Für welchen Begriff kann die Abbildung $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $g(z) := \frac{z}{|z|}$ als Beispiel dienen?

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Gegeben sei das Polynom $p(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^4 + 16) = (x^4 - 16)(x^4 + 16) = x^8 - 256$.

4.1) Ermitteln Sie sämtliche komplexen Nullstellen von p.

4.2) Welche der Nullstellen aus 4.1) sind reell, d.h. liegen in den reellen Zahlen?

4.3) Geben Sie eine 8×8-Matrix an, deren charakteristisches Polynom gleich p ist.