Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Bokowski
Dr. Bergner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9.2.2007

Klausur

zu **Lineare Algebra I für Inf, WInf**

Bitte in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen:

Name: .... Vorname: ....

Fachrichtung: .... Matrikelnummer: ....

Versehen Sie bitte alle Blätter mit Ihrem Namen. Legen Sie die Blätter am Schluss der Klausur in dieses Deckblatt ein, und geben Sie sie mit diesem zusammen ab.
Beachten Sie: **Die Lösungswege müssen klar erkennbar sein !**
Als Hilfsmittel sind zugelassen: alle schriftlichen Unterlagen, jedoch **kein** Taschenrechner

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
Punkte	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	65

Wir betrachten eine 10-elementige Teilmenge der Ecken des 600-Zells bestehend aus den Punkten

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ t-1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$

sowie

$$q_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ t-1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_4 = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 1-t \\ -1 \end{pmatrix} \quad q_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $t := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und es gilt $t^2 - t = 1$ sowie $(t-1)^2 = 2 - t$.

1.) Zeigen Sie, dass alle zehn Punkte auf dem Rand einer 4-dimensionalen Kugel mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegen. Wie groß ist der Radius dieser Kugel?

2.) Bestimmen Sie den Rang der 4×5-Matrix, die aus den Vektoren $p_1, \ldots, p_5$ gebildet wird.

3.) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes V, der durch $p_1, \ldots, p_5$ aufgespannt wird.

4.) Ermitteln Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren p_1 und p_2 im Bogenmaß.
Hinweis: $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5.) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1, p_2\rangle$, $\langle p_2, p_3\rangle$, $\langle p_3, p_4\rangle$, $\langle p_4, p_5\rangle$, $\langle p_5, p_1\rangle$. Folgern Sie in Verbindung mit Aufgabe 2, dass die Punkte $p_1, \ldots, p_5$ in einer Ebene liegen und ein gleichseitiges Fünfeck bilden.

6.) Zeigen Sie, dass der Nullvektor in der konvexen Hülle von $p_1, \ldots, p_5$ liegt, indem Sie den Nullvektor als Konvexkombination dieser Vektoren schreiben.

7.) Zeigen Sie, dass die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

8.) Zeigen Sie $Ap_i = q_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, 5$ sowie $Ap_1 = q_5$, wobei A die Matrix aus 7.) ist.

9.) Warum liegen die Punkte $q_1, \ldots, q_5$ in einer Ebene und bilden ein gleichseitiges Fünfeck?

10.) Es sei V der von $p_1, \ldots, p_5$ aufgespannte Vektorraum und W der von $q_1, \ldots, q_5$ aufgespannte Vektorraum. Überprüfen Sie, ob V und W zueinander senkrecht stehen.

11.) Ist die Determinante der 4×4-Matrix bestehend aus den Spalten p_1, p_2, q_1, q_2 gleich Null?

12.) Bestimmen Sie 3-dimensionale Teilräume bezüglich derer die 10 Punkte durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

13.) Welche Punkte bilden Facetten der konvexen Hülle aller 10 Punkte?
Eine Facette liegt vor, wenn die affine Hülle H der Punkte 3-dimensional ist und alle anderen Punkte auf einer Seite von H liegen.