Prof. Dr. W. Stannat
H.Heck, D. Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
9.2.2007

13. Übungsblatt

Präsenzaufgaben

(P52) *Rotationskörper*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [1, \infty)$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Durch die Rotation von f um die x-Achse erhält man einen Trichter, dessen Volumen V und Oberfläche O durch

$$V = \pi \int_1^\infty [f(x)]^2 \, dx \quad \text{und} \quad O = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

gegeben sind. Damit das ganze ein wenig hübscher aussieht wird eine studentische Hilfskraft mit einem Pinsel und einem Eimer Farbe ausgestattet, damit sie den Trichter neu anstreicht. Eine Woche harter Arbeit verleitet unsere Hilfskraft doch zum Nachdenken und nach einer kurzen Rechnung (die Sie überprüfen sollen) kommt sie zu dem Schluß, daß sie ihre Arbeit wohl niemals beenden wird, da die Oberfläche des Trichters unendlich groß ist. Als sie dieses Problem in der Sprechstunde ihres Tutors vorbringt, erhält sie den folgenden Rat: „Fülle den Trichter doch einfach bis zum Rand mit Farbe und schütte ihn anschließend um. Dann sieht er aus wie neu.“ Ist dieser Rat wirklich praktikabel?

(P53) *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale hinsichtlich ihrer Existenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^3} \, dx$

(iii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \, dx$

(P54) *Integralkriterium für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit dem Integralkriterium auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty k \exp(-k)$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln(k)}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k (\ln(k))^2}$

(P55) *Konvergenzradius von Potenzreihen*

(i) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^n}, \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(ii) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{5^{n+1} n}?$$

Ferienaufgaben

(P56) *Taylorreihen*

Bestimmen Sie für das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1$ die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(P57) *Taylorreihen*

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = e^x \sin x$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweis: Beachten Sie $f^{(4)}(x) = -4f(x)$.

(P58) In der Vorlesung wurde die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ mit Hilfe der folgenden Ungleichung begründet:

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$$

Leiten Sie diese Ungleichung für $n \geq 1$ her.
Hinweis: Verwenden Sie Ober– und Untersummen.