Prof. Dr. W. Stannat
H. Heck, D. Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
2.2.2007

12. Übungsblatt

Präsenzaufgaben

(P48) *Unter- und Obersummen*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, 2]$ und $f(x) = x^2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei mit

$$Z_n := \left\{ \frac{0}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n} \right\}$$

eine Menge von Teilpunkten des Intervalls $[0, 2]$ gegeben, die eine äquidistante Zerlegung von $[0, 2]$ in Teilintervalle festlegen.

(i) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[0, 2]$ und tragen Sie in Ihr Diagramm die Flächenelemente ein, die zur Bestimmung der Unter– bzw. Obersummen bzgl. der Unterteilung Z_5 zu berücksichtigen sind.

(ii) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Untersummen $s_f(Z_n)$ bzw. der Obersummen $S_f(Z_n)$ an.

Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel $\sum_{s=1}^{k} s^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$.

(iii) Bestimmen Sie nun die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n)$$

und geben Sie

$$\int_0^2 f(x)dx$$

an.

(P49) *Grundlegende Integrationstechniken*

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

$$\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) dx, \quad \int (x^2 + 3\cos x)\, dx, \quad \int \left(\frac{3}{x^2} - 2x^3\right) dx$$

$$\int \frac{3}{x}\, dx, \quad \int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2\right) dx, \quad \int \left(4e^x - 4x^3 + 2x + 5\sin x\right) dx$$

$$\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x} + x^{\frac{3}{5}}\right) dx$$

(P50) *Partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx,$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\, dx$

(P51) *Substitutionsregel*

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3\cos x} \cdot \sin x \, dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} \, dx$

(iii) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$

Hausaufgaben

(H42) *Grundlegende Integrationstechniken*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{x} \, dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

(iii) $\displaystyle\int \sqrt{1 + \sinh^2 x} \, dx$

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}} \, dx$

(H43) *Partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_1^3 (5x+3)e^{-2x} - \frac{3}{x^2} \, dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(2\cos x - x \sin x) \, dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx$

(H44) *Substitutionsregel*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-\frac{9}{8}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{7 - 8x} \, dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\cos x)^5 \, dx$

(iii) $\displaystyle\int_1^5 \frac{(\ln x)^4}{x} \, dx$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^3} \, dx$