Prof. Dr. W. Stannat
H. Heck, D. Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
26.1.2007

11. Übungsblatt

Präsenzaufgaben

(P44) *Differenzierbarkeit von Funktionen*

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = |x|^n\,, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß $f(x)$ für $n = 1$ nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Was gilt für $n \geq 2$?

(P45) *Technik des Differenzierens*

Differenzieren Sie folgende Funktionen.

$f_1(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

$f_2(x) = (x^2 - 1)(x^{13} + x^7 - 3x + 1)$

$f_3(x) = \dfrac{7x^2 + 2x}{27x^3 - 3}$

$f_4(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$

$f_5(x) = \cos(\sin x)$

(P46) *Differentiation der Umkehrfunktion*

Es sei die Funktion gegeben

$$f(x) = x + e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die erste Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $y_0 = 1$.

(P47) *Regel von l'Hospital*

(i) Werten Sie folgenden Grenzwert auf direktem Wege aus:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x}$$

Können Sie auf diesen Grenzwert die Regel von l'Hospital anwenden? Welches Resultat würden Sie bei unüberlegter Anwendung erhalten?

(ii) Untersuchen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}\,, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x}\,, \quad \lim_{x\to 0} (\sin(2\pi x) - 2\sin(\pi x)) \cdot \frac{1}{x^2}$$

Von welchem Typ sind die Grenzwerte jeweils?

Hausaufgaben

(H37) *Zwischenwertsatz und Stetigkeit*

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^{n+2} - x^2 - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß es eine Zwischenstelle $\xi \in [1, 1 + \frac{1}{n}]$ gibt mit $f(\xi) = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die binomische Formel (s. Ü9, Aufgabe (W10)), um $f(1 + \frac{1}{n}) > 0$ zu zeigen.

(H38) *Technik des Differenzierens*

Differenzieren Sie folgende Funktionen.

$f_1(x) = \sqrt{x^3} - 3x^{-\frac{5}{7}}$

$f_2(x) = \cos^3(3x^4 - 8x)$

$f_3(x) = \sinh x \cdot e^{\frac{x}{x-1}}$

$f_4(x) = \ln(x^3 + 2x - 1)$

(H39) *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-2, 3] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = |x - 1| \cdot (x^3 + 1).$$

(i) Für welche Werte $x \in [-2, 3]$ ist die Funktion f stetig, für welche differenzierbar?

(ii) Wie lauten Abbildungsvorschrift und Definitionsmenge von f'?

(H40) *Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{\sin 2x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{e^{-x}}$$

(H41) *Differentiation der Umkehrfunktion*

Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = \sinh x$. Vereinfachen Sie soweit, bis Sie die Formel aus der Vorlesung erhalten.