Prof. Dr. W. Stannat
H. Heck, D. Küpper

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/2007
19.1.2007

10. Übungsblatt

Wiederholungsaufgaben

(W11) Diskutieren Sie für nachstehende Funktionen

→ Definitionsbereich
→ Wertebereich
→ Periodizität

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad f_2(x) = 2^{\sin x}, \quad f_3(x) = \sin 2^x$$

(W12) *Funktionen skizzieren*

Es ist unter Benutzung nachstehender Anleitung folgende Funktion zu skizzieren

$$y = f(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Anleitung:

1. Zeichnen Sie (alles wirklich dünn!!!) in ein $[x, y]$-Koordinatensystem die Funktion $y_1 = x^2$.
2. Konstruieren Sie daraus die Funktion $y_2 = -x^2$ durch Spiegelung von y_1 an der x-Achse.
3. Nun ist $y_3 = 1 - x^2$ zu zeichnen. Dazu verschieben wir die x-Achse um 1 nach unten – fertig!
4. Kommen wir schließlich zu $y = \frac{1}{1-x^2}$: Nehmen Sie einen beliebigen x-Wert und den dazugehörigen y_3-Wert und zeichnen Sie den Punkt $(x, \frac{1}{y_3})$ ein. Das nennt man „reziprokes Spiegeln“ am Geradenpaar $y = \pm 1$. Zeichnen Sie zur Veranschaulichung die Geraden $y = 1$ und $y = -1$ dünn in das Koordinatensystem ein. Erkennen Sie die Spiegelung?
5. Zeichnen Sie zum Abschluß das letzte Funktionsbild sowie das zweite Koordinatensystem dick nach – fertig ist die Skizze!

Präsenzaufgaben

(P37) *Grenzwerte*

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte. Fertigen Sie eine Skizze an.

(i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, \quad \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x + 3}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}, \quad \lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$

(iii) $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x), \quad \lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) \quad \text{mit } f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

(P38) *Stetige Ergänzung*

Können Sie jeweils $f(0)$ derart definieren, daß die Funktionen f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind?

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ ? & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(P39) *Hyperbolische Funktionen*

Wir definieren die hyperbolischen Funktionen über die Exponentialfunktion:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

ferner

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Zeigen Sie unter Benutzung der Definition wenigstens eine der drei Identitäten

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$$

Hausaufgaben

(H31) *Berechnung von Grenzwerten*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{\sqrt{(2x+1)(x-2)}}, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)(x+3)x}{5x^3+x^2-1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{(\sqrt{x}-1)x}, \quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(\sqrt{x}-1)x}$

(iii) $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x), \quad \lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) \quad \text{mit } f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(H32) *Berechnung von Grenzwerten*

(i) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

(ii) Berechnen Sie nun den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}, \quad \text{für beliebige } m, n \in \mathbb{N}.$$

(H33) *Grenzwerte von Funktionenfolgen*

Betrachten Sie die stetigen (warum eigentlich stetig?) Funktionen

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

In welchen Punkten ist f stetig?

(H34) *Umkehrfunktionen*

Die Umkehrfunktionen arsinh, arcosh, usw. der hyperbolischen Funktionen lassen sich über den natürlichen Logarithmus erklären, z.B.:

$$\begin{aligned} \mathrm{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{für } x \geq 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie wenigstens eine dieser Identitäten.