Prof. Dr. W. Stannat
S. Fröhlich, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
12.01.2007

9. Übungsblatt

Wiederholungsaufgaben

(W9) *Fakultät und Binomialkoeffizient*

(i) Wiederholen Sie die Begriffe *Fakultät* und *Binomialkoeffizient* an folgenden Beispielen:

$$0! \quad 1! \quad 2! \quad 3! \quad 4! \quad 5! \quad \text{wobei } n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \text{ und } 0! = 1$$

$$\binom{4}{3} \quad \binom{7}{3} \quad \text{wobei} \quad \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(ii) Zeigen Sie die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

(iii) Wiederholen Sie, wie sich die Binomialkoeffizienten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks berechnen lassen.

(W10) *Binomischer Lehrsatz*

Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

die Ausdrücke

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Präsenzaufgaben

(P32) *Geometrische Reihe*

Wiederholen Sie den Begriff „Geometrische Reihe". Finden Sie in den folgenden Darstellungen jeweils eine geometrische Reihe wieder, und berechnen Sie ggf. die Grenzwerte.

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 5}{3^{k+1}} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}$$

(P33) *Partialbruchzerlegung und Teleskopreihe*

(i) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b in der Darstellung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Bestätigen Sie damit den Grenzwert der Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(P34) *Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k^2}$ (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ (iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2+e^k}$

(P35) *Umkehrfunktionen*

Berechnen Sie für folgende bijektive Funktionen die Umkehrfunktionen sowie die zu den Umkehrfunktionen gehörigen Definitionsbereiche.

(i) $f(x) = -2x + 1$ (ii) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ (iii) $f(x) = e^{3x} - 4$

Hausaufgaben

(H27) Finden Sie in den folgenden Darstellungen eine geometrische Reihe wieder, und berechnen Sie ggf. die Grenzwerte.

(i) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^{2k-2} \cdot 5^{-k+1}}{2^{k-2}}$ (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ für $|x| < 1$

(H29) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k^2}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{k}\right)^k$ (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{2k}$ (iv) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi k)}{1+k}$ (v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+k^2}{1+2k^4}$

(H30) *Umkehrfunktionen und Verkettungen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = 2x^2 \quad \text{definiert auf } D_f = D_g =]0, +\infty[\,.$$

(i) Skizzieren Sie f und g.

(ii) Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und Injektivität. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktionen. Skizzieren Sie diese.

(iii) Bilden Sie die Verkettung $h = f \circ g$. Untersuchen Sie auch diese auf strenge Monotonie, und bilden Sie auf direktem Wege ihre Umkehrfunktion.

(iv) Für die Umkehrfunktion h^{-1} von $h = f \circ g$ gilt $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Verifizieren Sie daran Ihr Resultat aus (iii).