Prof. Dr. W. Stannat
S. Fröhlich, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
22.12.2006

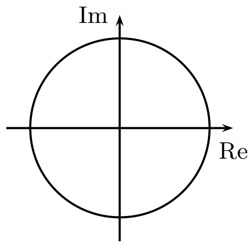
8. Übungsblatt

Präsenzaufgaben

(P24) *Zum Einstieg in die komplexen Zahlen*

Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

z	1	i	-1	$-i$
$\mathrm{Re}\,(z)$				
$\mathrm{Im}\,(z)$				
$\arg\,(z)$				



und tragen Sie die Zahlen in die vorgefertigte Skizze ab.

(P25) Bestimmen Sie Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen:

(i) $z = -1.5i$, (ii) $z = 2 - 2i$, (iii) $z = 2e^{i\pi}$

(P26) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(i) $z = \dfrac{5}{1-3i}$ (ii) $z = \dfrac{4+i}{1-i} + 7i$, (iii) $z = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(P27) *Wurzeln komplexer Zahlen*

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

(i) $z^2 = -9$, (ii) $z^3 = 8i$ (iii) $\dfrac{z-1}{2} = \dfrac{\frac{i}{2}}{z+1}$ $(z \neq -1)$

unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen jeweils in der komplexen Zahlenebene.

(28) Zeigen Sie ausführlich, dass die durch

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

gegebene Folge (a_n) den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$ besitzt.

(29) *Grenzwerte von Zahlenfolgen*

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz:

(i) $a_n = -3n + 2$, $b_n = \dfrac{4n^3 + 7n + 1}{13n^2 - 1}$, $c_n = \dfrac{2n^4 + 2n^3 + 4n}{4n^{12} + 3n^3 - n^2 + 1}$, $d_n = \left(1 + \dfrac{1}{7n+1}\right)^{1000}$

(ii) $a_n = 3^n - 1$, $b_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$, $c_n = \dfrac{2^n + 1}{2^{2n} - 1}$

(iii) $a_n = \sqrt{n+1}$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, $c_n = \sqrt[n]{23} + \dfrac{1}{n}$

(P30) Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Folge (a_n) mit nachstehenden Eigenschaften:

(i) (a_n) ist monoton steigend und besitzt den Grenzwert 2;
(ii) (a_n) ist monoton fallend, es gilt $2 < a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sie besitzt den Grenzwert 2;
(iii) (a_n) ist alternierend, beschränkt und divergent;
(iv) (a_n) ist alternierend und konvergent.

(P31) Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz:

$$a_n = \sqrt{n^2+7} - n, \quad b_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n, \quad c_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{2n}\,.$$

Hinweis: Es ist $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$.

Hausaufgaben

(H23) Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ Lösung der Gleichung ist.

(H24) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^6 + 64i = 0$$

unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

(H25)* Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $a\overline{a} - st > 0$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$sz\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} = 0$$

(i) für $s = 0$ eine Gerade
(ii) für $s \neq 0$ einen Kreis

in der komplexen Ebene beschreibt. Bestimmen Sie in (ii) insbesondere Mittelpunkt und Radius des Kreises.

(H26) Untersuchen Sie auf Konvergenz:

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\,, \quad b_n = \frac{3n^3 - 2n^2 + 5}{(3n+1)^3}\,\frac{\sqrt[n]{n!}}{5+3n}\,, \quad c_n = \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^n$$

(H27) Untersuchen Sie nachstehende Folge auf Monotonie und Konvergenz:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,.$$

Hinweis: Wie kann man die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ in kompakter Form darstellen?

Folgende Grenzwerte sollten Sie kennen:

$$\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1 \qquad \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0 \qquad \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty \qquad \frac{a^n}{n^k} \longrightarrow \infty \ (a > 1,\ k \text{ fest}) \qquad \frac{a^n}{n^k} \longrightarrow 0 \ (0 < a < 1,\ k \text{ fest})$$

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow e \ (\textbf{korrigierteVersion}) \qquad \text{Stirlingsche Formel: } n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$