Prof. Dr. W. Stannat
S. Fröhlich, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
15.12.2006

7. Übungsblatt

Präsenzaufgaben

(P21) *Spiegelung in* $\mathbb{R}^2$

Der Punkt $\vec{x} = (1, 2)^T$ werde an der y-Achse gespiegelt. Als Bild erhalte man $\vec{y}$.

(i) Bestimmen Sie $\vec{y}$ anhand einer Skizze.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A aus den Bildern der Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.

(iii) Überprüfen Sie, ob es sich um eine Spiegelung handelt, d.h. ob gilt $A^2 = E$.

(P22) *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Spur und Determinante dieser Matrix.

(ii) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2. Wo finden Sie im Polynom $p(\lambda)$ die Spur und die Determinante der Matrix wieder?

(iii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenräume $\{\vec{x} \,:\, A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$.

(P23) *Basisdarstellung von Vektoren und linearen Abbildungen*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basis gegeben

$$V = \left\{ \vec{v}_1 = (1, 0, 1)^T,\ \vec{v}_2 = (-1, 2, 1)^T,\ \vec{v}_3 = (-2, -2, 2)^T \right\}$$

sowie ein Vektor

$$\vec{x}_1 = (1, 0, -3)^T$$

(i) Begründen Sie zunächst, dass V tatsächlich eine Basis darstellt.

(ii) Bestimmen Sie die Darstellung $\vec{y}_1$ des gegebenen Vektors $\vec{x}_1$ bez. der Basis V.

Ferner sei der Vektor $\vec{y}_2$ gegeben durch

$$\vec{y}_2 = (1, 0, 1)^T \quad \text{bez. der Basis } V.$$

(iii) Bestimmen Sie die Darstellung $\vec{x}_2$ dieses Vektors $\vec{y}_2$ bez. der Standardbasis.

Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad \text{gegeben durch } \vec{x} \mapsto \vec{v}_1 \times \vec{x}$$

mit obigem Basisvektor $\vec{v}_1$.

(iv) Begründen Sie, dass diese Abbildung tatsächlich linear ist.

(v) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A dieser Abbildung.

(vi) Stellen Sie schließlich A in der Basis V dar, d.h. bestimmen Sie $\widetilde{A} = V^{-1} \cdot A \cdot V$.

Hausaufgaben

(H19) *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(i) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie alle Eigenwerte.

(ii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenräume.

(H20) *Spiegelung in* $\mathbb{R}^2$

(i) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A bei Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $g\,:\,x+y=0$ aus den Bildern der Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. Berechnen Sie insbesondere $\det A$. Ist A orthogonal?

(ii) Bestimmen Sie hieraus insbesondere das Spiegelbild $\widetilde{\triangle}$ des Dreiecks $\triangle$ mit den Eckpunkten $P=(1,0)^T$, $Q=(3,1)^T$ und $R=(2,2)^T$. Wie lauten die Bilder dieser Eckpunkte? Fertigen Sie auch hier eine Skizze an.

(H21) *Drehungen in* $\mathbb{R}^3$ *und Basiswechsel*

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (bez. der Standardbasis) der Drehung des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ um die Drehachse $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}(-2,1,2)^T$.

Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Ergänzen Sie $\vec{v}_1$ zu einer Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ aus orthogonalen Einheitsvektoren.

(ii) Wie lautet die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ der Drehung bez. dieser Basis V?

(iii) Zeigen Sie, dass $\widetilde{A}$ eine orthogonale Matrix ist.

(iv) Wie berechnet sich nun A aus $\widetilde{A}$ und V? Berechnen Sie A näherungsweise.

(H22)* *Lineare Abbildungen und Basiswechsel*

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\varphi((1,2)^T) = 3\cdot(1,2)^T\,, \quad \varphi((-1,3)^T) = -2\cdot(-1,3)^T\,. \qquad (*)$$

(i) Bestimmen Sie (*ohne* explizite Rechnung!) eine Basis $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, bez. welcher sich die Abbildungsmatrix M dieser Abbildung in Diagonalgestalt schreiben lässt.

(ii) Bestimmen Sie nun die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung bez. der Standardbasis.

(iii) Berechnen Sie nun $\varphi(0,5)$, und zwar

(a) indem Sie zunächst $(0,5)^T = (1,2)^T + (-1,3)^T$ benutzen und anschließend $\varphi(0,5)$ aus $(*)$ sowie der Linearität von φ ermitteln;

(b) indem Sie zweitens Ihr Resultat aus Aufgabenteil (ii) verwenden und $\varphi(0,5)$ direkt aus einer Matrizenmultiplikation gewinnen.

Aufgabe (H22)* ist zusätzlich und bringt – je nach Bearbeitung – auch zusätzliche Punkte!