Prof. Dr. W. Stannat
S. Fröhlich, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
1.12.2006

6. Übungsblatt

Wiederholungsaufgaben

(W8) *Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen*

(i) Skizzieren Sie die Funktionengraphen von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ für $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Auf welchen Teilintervallen existieren die Umkehrfunktionen $\arcsin x$, $\arccos x$ usw?

(iii) Skizzieren Sie jeweils den Funktionengraphen dieser Umkehrfunktionen.

Präsenzaufgaben

(P17) *Inversenberechnung von 2×2-Matrizen*

Gegeben sei die allgemeine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $\det A = ad - bc \neq 0$.

(i) Verifizieren Sie

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(ii) Ermitteln Sie speziell die Inversen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(P18) *Berechnung inverser Matrizen*

Bestimmen Sie – falls möglich – die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(P19) *Drehungen in $\mathbb{R}^2$*

(i) Wie wurde in der Vorlesung eine Drehmatrix $D(\varphi) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert?

(ii) Bestimmen Sie das Bild $D(\varphi) \cdot \vec{x}$ des Vektors $\vec{x} = (-1, 2)^T$ nach Drehung um die Drehwinkel $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

(iii) Bestimmen Sie – *ohne* explizite Rechnung – die Abbildungsmatrix $M(\varphi)$ der Umkehrabbildung einer Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ. Verdeutlichen Sie sich insbesondere die Identität

$$M(\varphi) = D(\varphi)^{-1}.$$

Notieren Sie schließlich die Abbildungsmatrix für die in (ii) genannten Winkel.

(P20) *Orthogonale Projektion auf eine Gerade*

Gegeben sei die Gerade $g : t(1, 1, 1)^T$ im $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion auf g.

(ii) Bestimmen Sie den Abstand $d(\vec{x}, g)$ des Punktes $\vec{x} = (-10, -1, 3)^T$ zur Geraden g.

Hausaufgaben

(H16) *Berechnung inverser Matrizen und lineare Gleichungssysteme*

(i) Bestimmen Sie – falls möglich – die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Lösen Sie nun unter Verwendung Ihrer Resultate die linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = (1, 0, 1)^T, \quad B\vec{x} = (2, 1, 0, -2)^T.$$

(H17) *Drehungen in* $\mathbb{R}^3$

(i) Zeigen Sie, daß

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix ist.

(ii) Bestimmen Sie den Drehwinkel φ.

(iii) Bestimmen Sie einen Einheitsvektor $\vec{v}$, welcher die Drehachse erzeugt.

(H18) *Orthogonale Projektion auf eine Ebene*

Gegeben sei die Ebene $E\,:\,\lambda_1(1, 0, 2)^T + \lambda_2(-1, 2, 1)^T$ in Parameterform.

(i) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion auf E.

(iii) Berechnen Sie den Abstand $d(\vec{x}, E)$ des Punktes $\vec{x} = (2, -1, 3)^T$ zur Ebene E.