Prof. Dr. W. Stannat
S. Fröhlich, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
24.11.2006

5. Übungsblatt

Wiederholungsaufgaben

Die Logarithmusfunktion

Für reelles $a > 0$, $a \neq 1$, ist der *Logarithmus* $\log_a$ *zur Basis* a definiert als

$$\log_a x = y \quad \text{genau dann, wenn } a^y = x \quad \text{für } x > 0.$$

Der Logarithmus zur Basis $e = 2.71\ldots$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit ln bezeichnet.
Der Logarithmus zur Basis $a = 10$ heißt *dekadischer Logarithmus.*

(W5) Berechnen Sie den Wert von x aus folgenden Gleichungen:

(i) $\log_{\frac{1}{2}} 256 = x^3$ (ii) $\log_x 2 = -\frac{2}{3}$

(W6) Skizzieren Sie die Funktionen

(i) $\ln x$ für $x > 0$ (ii) $\ln |x|$ für $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

(W7) Zeigen Sie

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

und daraus folgend

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}; \quad \text{insbesondere gilt also für } b = e: \ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Präsenzaufgaben

(P14) *Berechnung von Determinanten*

Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(P15) *Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme, Kern und Rang*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Rang und Kern von A. Verifizieren Sie hieran die Identität

$$\dim \operatorname{kern}(A) + \operatorname{rang}(A) = 5.$$

(ii) Betrachten Sie nun das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } \vec{b} = (0, 2, 4, 4)^T.$$

Verifizieren Sie, daß $\vec{x}_s = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine spezielle Lösung dieses inhomogenen Systems darstellt. Wie erhalten Sie mit ihr die vollständige Lösungsmenge des Systems?

(P16) *Spezielle Matrizen und Vertauschbarkeit in Matrixprodukten*

Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

finde man eine (3×2)-Matrix B, so daß gilt $AB = E$. Berechnen Sie schließlich das Produkt BA, und vergleichen Sie!

Hausaufgaben

(H13) *Berechnung von Determinanten*

Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ -7 & 11 & 3 \\ 2 & -9 & -11 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(H14) *Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme und Determinanten*

Gegeben seien die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = (3,6)^T$$

mit einem reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Entscheiden Sie unter Berechnung der Determinante $\det(A)$, für welche Werte von α das lineare Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ *eindeutig* lösbar ist.
Bestimmen Sie gegebenfalls diese eindeutig bestimmte Lösung.

(ii) Bestimmen Sie schließlich die Lösungsmenge auch für die übrigen Werte von α.

(H15) *Spezielle Matrizen und Vertauschbarkeit in Matrixprodukten*

Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

finde man die Menge aller (2×2)-Matrizen, so dass gilt $AB = BA$.