Prof. Dr. W. Stannat
S. Fröhlich, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
17.11.2006

4. Übungsblatt

Wiederholungsaufgaben

(W4) *Potenz- und Wurzelfunktionen*

(i) Skizzieren Sie die Funktionengraphen der Potenzfunktionen

$$f(x) = x^p \quad \text{für } p = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$$

(ii) Vervollständigen Sie:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\cdots]{a^{\cdots}} \qquad \text{für } a \geq 0,\ m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0;$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{\cdots} \qquad \text{für } a > 0,\ p > 0 \text{ bzw. } a \neq 0,\ p \in \mathbb{N};$$

$$a^p \cdot a^q = a^{\cdots},\ (a^p)^q = a^{\cdots},\ a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^{\cdots} \qquad \text{für } a, b > 0,\ p, q \in \mathbb{R}.$$

(iii) Vereinfachen Sie, so weit möglich, folgende Ausdrücke ($a, b > 0$).

(a) $\dfrac{\sqrt[2]{ab^5}}{\sqrt[4]{(2a)^2 b^6}}$ (b) $\dfrac{(3a)^2 b^3}{\sqrt{a} b^2}$ (c) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^6 b^3} + \sqrt{b^3}\right)^2}{b}$

Präsenzaufgaben

(P10) Berechnen Sie, insofern möglich, alle möglichen Produkte $A \cdot B$, $C \cdot C$ usw. zwischen folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(P11) *Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme*

Lösen Sie folgende zwei Gleichungssysteme:

(i) $x + 3y - 2z = 2$ (ii) $3x + y - 4z = 0, \quad x - 3y + 2z = 2.$

Interpretieren Sie Ihre Resultate geometrisch.

(P12) *Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus I*

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihre Ergebnis geometrisch.

(P13) *Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus II*

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Hausaufgaben

(H10) *Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus III*

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

(H11) *Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus IV*

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Resultat geometrisch.

(H12) *Aufgabe aus der Klausur zur Vordiplomprüfung Mathematik I WS 2004/05*
Bearbeitungszeit während der Klausur: 20 Minuten

(i) Bestimmen Sie alle Lösungsvektoren $\vec{x}$ des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & \alpha \\ 2 & \alpha & 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die gesamte Lösungsmenge in vektorieller Form an.

Hinweis: Als „kritische“ Parameter stellen sich $\alpha = 4$, $\alpha = 6$ und $\alpha = 8$ heraus. Kennzeichnen Sie in Ihren Rechnungen das Auftreten dieser Parameter, und begründen Sie, weshalb Sie diese als kritisch ansehen sollten! Analysieren Sie Ihre Rechnungen schließlich noch einmal für diese kritischen Fälle.

(ii) Welchen Rang hat die Matrix A in Abhängigkeit von α?