Prof. Dr. W. Stannat
S. Fröhlich, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
3.11.2006

2. Übungsblatt

Wiederholungsaufgaben

(W1) *Winkel in Gradmaß und Bogenmaß*

Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

α	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π		2π
$\alpha°$			$90°$		$180°$	$270°$	

Zeichnen Sie die jeweiligen Winkel am Einheitskreis ein.

(W2) *Sinus- und Kosinusfunktion*

(i) Skizzieren Sie die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ jeweils im Intervall $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Benennen Sie anhand Ihrer Grafik die Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte der Funktionen.

(ii) Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$0°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$30°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$90°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$

Gruppenaufgaben

(G4) *Rechnen mit Vektoren*

(i) Gegeben seien die Ortsvektoren $\vec{x} = (2, -3, 1)^T$, $\vec{y} = (1, 0, -2)^T$ und $\vec{z} = (0, 2, -1)^T$.

Berechnen Sie

$$3\vec{x}\,, \quad \vec{x} + \vec{y}\,, \quad \vec{x} - 2\vec{z}\,, \quad 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}\,.$$

(ii) Berechnen Sie die Länge der Ortsvektoren $\vec{x} = (8, -2, 4)^T$ und $\vec{y} = (5, 4, -6)^T$. Erläutern Sie Ihrem Nachbarn anhand dieser Beispiele die Wirkungsweise des Satzes des Pythagoras.

(G5) *Rechnen mit Vektoren*

(i) Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$, welche die Diagonalen eines Parallelogramms bilden. Wie berechnen sich die Seitenvektoren dieses Parallelogramms aus $\vec{e}$ und $\vec{f}$?

(ii) Verifizieren Sie nun ihre Resultate am Beispiel des Parallelogramms mit

$$\vec{e} = (4, 2)^T\,, \quad \vec{f} = (1, 2)^T$$

und Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0, 0)^T$. Was sind also die Koordinaten der vier Eckpunkte des Parallelogramms? Berechnen Sie außerdem die Länge seiner Seiten.

(G6) *Skalar- und Vektorprodukt*

Wie groß sind Skalar- und Vektorprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ bzw. $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$, wenn

(i) $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 4$, $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 60°$

(ii) $\|\vec{x}\| = 6$, $\|\vec{y}\| = 3$, $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 30°$

Hausaufgaben

(H4) *Geraden im Raum*

Stellen Sie jeweils die Gleichung der Geraden in Parameterform auf, die durch die Punkte P und Q geht. Bestimmen Sie in Aufgabenteil (i) auch eine implizite Darstellung.

(i) $P = (1, 2)^T$, $Q = (2, 1)^T$

(ii) $P = (1, -2, 3)^T$, $Q = (0, 2, 1)^T$

(iii) $P = 3\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$, $Q = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 3\vec{e_3}$

(H5) *Skalarprodukt*

(i) Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein fest gewählter, nichtverschwindender Vektor.
Begründen Sie, dass sich jeder beliebige Vektor $\vec{u}$ in der Form

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w},$$

schreiben lässt, wobei $\vec{v}$ parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{w}$ senkrecht zu $\vec{a}$ ist.

Hinweis: Gesucht sind also $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in Abhängigkeit von $\vec{u}$ und $\vec{a}$.

(ii) Bestimmen Sie nun speziell $\vec{v}$ und $\vec{w}$, falls

$$\vec{u} = (1, 2, -1)^T , \quad \vec{a} = (2, 0, 1)^T .$$

(H6) *Skalar- und Vektorprodukt*

(i) Man berechne die Seitenlängen und Winkel des ebenen Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A = (3, 0)^T , \quad B = (1, 3)^T , \quad C = (0, -1)^T .$$

Fertigen Sie eine Skizze an.

(ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks unter Verwendung des Vektorprodukts.

(iii) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC}, \quad \vec{z} = (1, 1, 2)^T$$

(mit den Punkten A und B aus Aufgabenteil (i)) aufgespannten Spats. Erweitern Sie dazu die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ zu Vektoren im $\mathbb{R}^3$!