Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 06/07
27.10.2006

1. Übungsblatt zur Mathematik I für MB, WI(MB), MPE und Mech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben seien folgende komplexe Zahlen

$$z_1 = 3 + 4i \qquad z_2 = -2 + i \qquad z_3 = 7 - i.$$

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z_1, z_2, z_3.

b) Berechnen Sie $z_1 + z_3$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $|z_1|$ und geben Sie diese Zahlen in der Form $a + bi$ an.

c) Skizzieren Sie die Zahlen z_1, z_2, z_3 und die in b) berechneten Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene.

Aufgabe G2

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe G3

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, so dass folgende Ungleichungen bzw. Gleichungen erfüllt sind:

$$(1) \quad \frac{x-4}{x^2-9} \leq 0, \; x \neq \pm 3, \qquad (2) \quad \frac{3x-1}{(x-4)^2} = \frac{1}{2}, \; x \neq 4.$$

(b) Bestimmen Sie

$$s = \sum_{k=1}^{100} k^6 + \sum_{m=2}^{101} [75 - (m-1)^6].$$

Hinweis: Indexverschiebung! Berechnen Sie nicht $\sum_{k=1}^{100} k^6$.

Hausübung

Aufgabe H1

Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + 2i.$$

(a) Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ und geben Sie diese Zahlen in der Form $a + bi$ an.

(b) Skizzieren Sie z_1 und z_2, sowie die berechneten komplexen Zahlen in der Zahlenebene.

Aufgabe H2

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

Aufgabe H3

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, so dass folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$(1) \quad |x-5| + x \leq 7, \qquad (2) \quad x^3 - 4x \leq (x-2)(x+4)^2.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Wert (in Abhängigkeit von n) von

$$t(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{m=n+3}^{2n+2} \frac{m-2}{m}.$$