Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 14, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 41 (*Ritz-Verfahren*)

Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Ritz und der Ansatzfunktion

$$\varphi(x,y) \;=\; x(1-x)y(1-y)$$

eine Näherungslösung für folgendes Randwertproblem über $G = [0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= 4 \qquad (x,y) \in G \\ u(x,y) &= 0 \qquad (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

Die selbstadjungierte Form des elliptischen RWP lautet

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u\right) + c(x,y)u = g(x,y) \quad \textit{für} \quad (x,y) \in G$$

und $u(x,y) \equiv 0$ *für* $(x,y) \in \partial G$. *Damit ist in der obigen Aufgabenstellung* $a_1 \equiv 1 \equiv a_2$, $c \equiv 0$ *und* $g \equiv 4$.

Die Approximation der Lösung u *wird nun bestimmt als* $\alpha\varphi$, *aus der Minimierung des Integrals*

$$I(\alpha\varphi) = \iint_G \left((\alpha\varphi_x)^2 + (\alpha\varphi_y)^2 - 2g\alpha\varphi\right)\, \mathrm{d}(x,y)$$

$$= \alpha^2 \iint_G \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dx\, dy - 2\alpha \iint_G g\varphi\, \mathrm{d}(x,y)$$

bezüglich des Parameters α. *Notwendig dafür ist*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} I(\alpha\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\iint_G g\varphi\, \mathrm{d}(x,y)}{\iint_G \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right)\, \mathrm{d}(x,y)}$$

mit

$$\begin{aligned}
\iint_G 4\varphi \; \mathrm{d}(x,y) &= 4\int_0^1 \left(y(1-y)\int_0^1 (x-x^2)\;\mathrm{d}x \right)\;\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 y(1-y)\;\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{9} \\
\iint_G \left(\varphi_x^2+\varphi_y^2\right)\;\mathrm{d}(x,y) &= \iint_G \left((1-2x)^2y^2(1-y)^2 + x^2(1-x)^2(1-2y)^2\right)\;\mathrm{d}(x,y) \\
&= 2\iint_G \left((1-2x)^2y^2(1-y)^2\right)\;\mathrm{d}(x,y) \\
&= 2\int_0^1 \left(y^2(1-y)^2 \int_0^1 (4x^2-4x+1)\;\mathrm{d}x \right)\;\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 \left(y^2(1-y)^2 \left(\frac{4}{3}-2+1\right)\right)\;\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \left[y^4-2y^3+y^2\right]\;\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \;=\; \frac{1}{45}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\alpha = \frac{45}{9} = 5$$

und

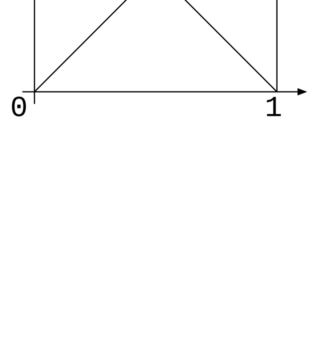
$$v(x,y) = 5\,\varphi(x,y) = 5\,x(1-x)y(1-y).$$

G 42 (*Finite Elemente*)

Man löse näherungsweise die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
-\triangle u &= 1 \quad \text{in } G=(0,1)\times(0,1), \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial G.
\end{aligned}$$

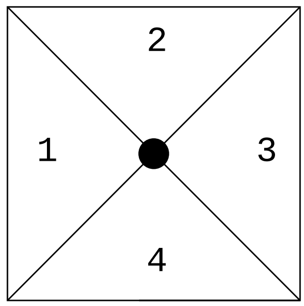
unter Verwendung der einfachsten Methode der finiten Elemente mit nur einem inneren Knoten $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$ und der folgenden Triangulierung:

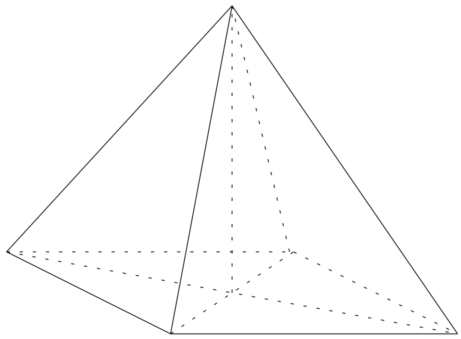


Die schwache Formulierung für das Problem lautet:

$$a(u,v) = \int_G \nabla u^T \, \nabla v \, dx \, dy = \int_G 1 \cdot v \, dx \, dy = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(G)$$

Man wählt den Raum S_h der stückweise linearen Funktionen aus $H_0^1(G)$ Für den einzigen inneren Knoten der angegebenen Triangulierung wählt man dann die Basisfunktion ϕ_1 stückweise linear mit $\phi_1(x_1, y_1) = 1$ und $\phi_1 = 0$ am Rande.





Für die Steifigkeitsmatrix wird die Ableitung von ϕ benötigt:

Dreieck	1	2	3	4
$\partial_x \phi_1$	2	0	-2	0
$\partial_y \phi_1$	0	-2	0	2

Damit berechnet man die Steifigkeitsmatrix (in diesem Beispiel nur 1×1):

$$a_{1,1} = a(\phi_1, \phi_1) = \int\limits_G |\nabla \phi_1|^2 \, dx \, dy = \int\limits_{1,2,3,4} \left(|\partial_x \phi_1|^2 + |\partial_y \phi_1|^2 \right) \, dx \, dy = \int\limits_{1,2,3,4} 4 \, dx \, dy = 4.$$

Für die rechte Seite berechnet man

$$b_1 = \int\limits_G 1 \cdot \phi_1 \, dx \, dy = \int\limits_{1,2,3,4} \phi_1 \, dx \, dy = \frac{1}{3}.$$

Damit ist

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} = \frac{1}{12}$$

und die Näherungslösung im Knoten $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ lautet

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx \alpha_1 \cdot \phi_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12}.$$

G 43 (*Lineare Randwertaufgabe*)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-u''(x) = 1, \quad x \in [a, b], \quad u(a) = u(b) = 0.$$

a) Wie lautet die exakte Lösung?

b) Welches Gleichungssystem ergibt sich bei einer Diskretisierung mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{N+1}$, wenn man mit dem symmetrischen Differenzenquotienten zweiter Ordnung diskretisiert und die Randbedingungen ausnutzt?

c) Warum liefert das Verfahren in b) exakte Werte an den Knoten x_i?

d) Zeigen Sie, daß für die Konditionszahl der Matrix $A = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$ folgende Abschätzung gilt:

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{1}{2}\left((N+1)^2 - 1\right).$$

Interpretieren Sie dies!

Hinweis: Zur Abschätzung der Norm von A^{-1} können Sie die Definition der zugeordneten Matrixnorm benutzen. Nutzen Sie auch die Tatsache aus, dass bei diesem Beispiel das Verfahren die exakte Lösung liefert.

a) *Zweifache Integration von $u''(x) = -1$ liefert $u(t) = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$. Mit den Randbedingungen*

$$\begin{aligned} u(a) &= -\tfrac{1}{2}a^2 + C_1 a + C_2 &= 0 \\ u(b) &= -\tfrac{1}{2}b^2 + C_1 b + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

erhält man $C_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ und $C_2 = -\frac{1}{2}ab$, also

$$u(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + (a+b)x - ab) = \frac{1}{2}(x-a)(b-x).$$

b) *Man erhält das System*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = h^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{1}}.$$

c) *Bei dem symmetrischen Differenzenquotient steht im Fehlerterm die vierte Ableitung (man sieht es über die* Taylor*-Entwicklung). Bei Polynomen vom Höchstgrad zwei verschwindet die vierte Ableitung und somit ist der Differenzenquotient für diese Polynome exakt.*
Man kann dies auch ohne Taylor*-Entwicklung leicht sehen: für $u(x) = Ax^2 + Bx + C$ ist*

$$\begin{aligned} u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) &= \left[A(x-h)^2 + B(x-h) + C\right] \\ &\quad -2\left[Ax^2 + Bx + C\right] \\ &\quad + \left[A(x+h)^2 + B(x+h) + C\right] \\ &= 2Ah^2. \end{aligned}$$

Wegen $u''(x) \equiv 2A$ ist dies gerade $h^2 \cdot u''(x)$.

d) *Es gilt*

$$\|A\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \max_{k=1,\dots,N} \sum_{l=1}^{N} |a_{kl}| = 4.$$

Die exakte Lösung $\tilde{u}$ der RWA ist eine Parabel mit Nullstellen a und b und der Krümmung -1, es gilt also $\tilde{u}(x) = -\frac{1}{2}(x-a)(x-b)$. Nach b) ist die numerische Lösung der RWA exakt, man berechnet daher leicht, dass

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_\infty &= \frac{1}{8}\,(b-a)^2, \quad N \text{ ungerade},\\ \|\tilde{u}\|_\infty &= \frac{1}{8}\,(b-a)^2\,\frac{(N+1)^2-1}{(N+1)^2}, \quad N \text{ gerade}. \end{aligned}$$

Zusammen gilt

$$\|\tilde{u}\|_\infty \geq \frac{1}{8}\,(b-a)^2\,\frac{(N+1)^2-1}{(N+1)^2}.$$

Zur Abschätzung der Norm der Inversen benutzen wir nun die Definition der zugeordneten Matrixnorm unter Beachtung, dass $A\tilde{u} = b \Leftrightarrow \tilde{u} = A^{-1}b$ (das Verfahren liefert für dieses Beispiel die exakte Lösung!):

$$\begin{aligned} \left\|A^{-1}\right\|_\infty &\overset{\text{def}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \frac{\|A^{-1}b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\|\tilde{u}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \geq \frac{1}{8}\,\frac{(b-a)^2}{h^2}\,\frac{(N+1)^2-1}{(N+1)^2}\\ &= \frac{1}{8}\,(N+1)^2\,\frac{(N+1)^2-1}{(N+1)^2} = \frac{1}{8}\,\left((N+1)^2-1\right). \end{aligned}$$

Somit gilt für die Konditionszahl der Matrix A:

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty \geq 4 \cdot \frac{1}{8}\,\left((N+1)^2-1\right) = \frac{1}{2}\,\left((N+1)^2-1\right).$$

Also wächst die Kondition quadratisch mit der Anzahl der Diskretisierungspunkte. Dies hat zur Folge, daß zwar der Konsistenzfehler abnimmt, aber der Fehler beim Lösen des LGS zunimmt bzw. iterative Löser immer schlechter konvergieren.