Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 13, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

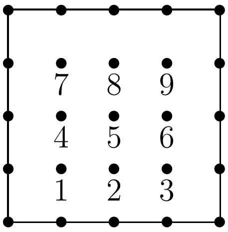
G 38 (*Diskretisierung der Poisson-Gleichung*)

Die POISSON-Gleichung auf dem Gebiet $G = [0,1] \times [0,1]$,

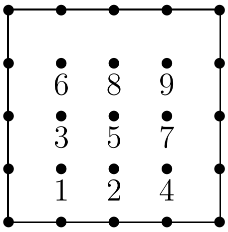
$$\begin{array}{rcllcr} -\Delta u(x,y) &=& f(x,y), & (x,y) &\in& G, \\ u(x,y) &=& 0, & (x,y) &\in& \partial G, \end{array}$$

soll mit dem 5-Punkte-Stern und $h = 1/4$ diskretisiert werden.

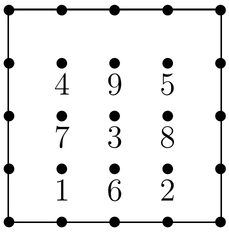
a) Wie lautet das Gleichungssystem $Au^h = b$ für folgende Numerierungen:



α) zeilenweise



β) diagonal



γ) Schachbrett

b) Prüfen Sie für alle drei Fälle folgende Eigenschaften der Matrix A: symmetrisch, L-Matrix, irreduzibel diagonaldominant und positiv definit.

Zusatz: Welche Numerierung ist die günstigere, damit in der Dreieckszerlegung $A = LR$ die Matrizen L und R möglichst dünn besetzt sind. (Keine Gauß-Zerlegung berechnen!)

a) Mit $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ und $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ lauten die Gleichungssysteme:

α) Zeilenweise Numerierung

$$\frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ \hline -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ \hline & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{pmatrix}$$

β) *Diagonale Numerierung*

$$\frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{c|cc|ccc|cc|c}
4 & -1 & -1 & & & & & & \\
\hline
-1 & 4 & & -1 & -1 & & & & \\
-1 & & 4 & & -1 & -1 & & & \\
\hline
 & -1 & & 4 & & & -1 & & \\
 & -1 & -1 & & 4 & & -1 & -1 & \\
 & & -1 & & & 4 & & -1 & \\
\hline
 & & & -1 & -1 & & 4 & & -1 \\
 & & & & -1 & -1 & & 4 & -1 \\
\hline
 & & & & & & -1 & -1 & 4
\end{array}\right]
\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{31} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{32} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{12} \\ f_{31} \\ f_{22} \\ f_{13} \\ f_{32} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{pmatrix}$$

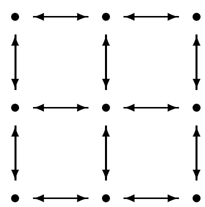
γ) *Schachbrett-Numerierung*

$$\frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
4 & & & & & -1 & -1 & & \\
 & 4 & & & & -1 & & -1 & \\
 & & 4 & & & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 & & & 4 & & & -1 & & -1 \\
 & & & & 4 & & & -1 & -1 \\
\hline
-1 & -1 & -1 & & & 4 & & & \\
-1 & & -1 & -1 & & & 4 & & \\
 & -1 & -1 & & -1 & & & 4 & \\
 & & -1 & -1 & -1 & & & & 4
\end{array}\right]
\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{31} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{33} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{32} \\ u_{23} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{31} \\ f_{22} \\ f_{13} \\ f_{33} \\ f_{21} \\ f_{12} \\ f_{32} \\ f_{23} \end{pmatrix}$$

b) i) *Die Matrix ist in allen Fällen symmetrisch,* $a_{ij} = a_{ji}$.

ii) *Die Matrix ist mit* $a_{ii} = 4 > 0$ *und* $a_{ij} \leq 0$ *für* $i \neq j$ *stets L-Matrix.*

iii) *Die Matrix ist immer irreduzibel, denn diese Eigenschaft ist unabhängig von der Numerierung der Knoten: Der zugehörige gerichtete Graph ist stets stark zusammenhängend. Da die Matrix auch diagonaldominant ist und mindestens einmal die strikte Ungleichung gilt, ist sie auch irreduzibel diagonaldominant.*



iv) *Jede irreduzibel diagonaldominante L-Matrix ist positiv definit.*

Zusatz: *Die Schachbrett-Numerierung ist die günstigere Numerierung, denn nutzt man die Darstellung der Dreieckszerlegung in Blockmatrixgestalt*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ A_{21}R_{11}^{-1} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ & R_{22} \end{pmatrix}$$

mit den Dreieckszerlegungen $L_{11}R_{11} = A_{11}$ *und* $L_{22}R_{22} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ *(siehe* **H 6***), so haben* L_{11} *und* R_{11} *Diagonalgestalt. Somit haben* $A_{21}R_{11}^{-1}$ *und* $L_{11}^{-1}A_{12}$ *die gleiche Besetzungsstruktur wie* A_{21} *bzw.* A_{12}.

Im Fall der zeilenweisen Numerierung haben die Blockmatrizen auf der Diagonalen Tridiagonalgestalt. Deswegen haben die Matrizen der Dreieckszerlegung $A_{11} = L_{11}R_{11}$ *die*

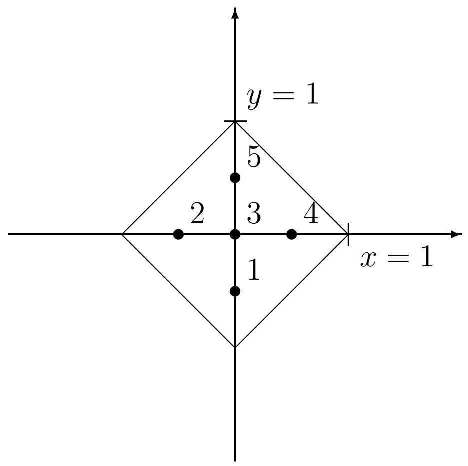
Bandbreite $(1,0)$ *bzw.* $(0,1)$. *Die Inversen* L_{11}^{-1} *und* R_{11}^{-1} *sind dann vollbesetzte untere bzw. obere Dreiecksmatrizen. Wie im Fall einer Blockzerlegung in vier Matrizen ist auch im Fall einer Blockzerlegung in neun Matrizen* $L_{21} = A_{21}R_{11}^{-1}$ *und* $R_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}$. *Es findet somit ein* Fill-in *statt.*

(Bemerkung: Eine Blockzerlegung in neun Matrizen kann man durch passendes Zusammenfassen der Untermatrizen in eine Blockzerlegung in vier Matrizen überführen.)

G 39 (*Differenzenverfahren für selbstadjungierte elliptische DGL*)
Diskretisieren Sie die selbstadjungierte DGL

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2+y^2)u_x\right) + \tfrac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)u_y\right) &= 4 && \text{auf } G \\ u &= \ln(1+x^2+y^2) && \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

mit $h = \frac{1}{2}$ und $G = \{x : \|x\|_1 \leq 1\}$:



Bestimmen Sie Näherungswerte für u in den Knoten $1, \ldots, 5$.

Hinweis: Verwenden Sie die Symmetrie des Problems

Aus der Aufgabenstellung und der allgemeinen Form der selbstadjungierten DGL ergibt sich

$$\begin{aligned} a(x,y) = b(x,y) &= -(1+x^2+y^2), \\ c(x,y) &\equiv 0, \\ g(x,y) &\equiv 4. \end{aligned}$$

Damit lautet die Diskretisierung im Knoten 1:

$$4\left[\frac{21}{16}\ln(\frac{3}{2}) + \frac{21}{16}\ln(\frac{3}{2}) + \frac{25}{16}\ln(2) + \frac{17}{16}u_3 - \frac{84}{16}u_1\right] = 4.$$

Wegen der Symmetrie des Differenzenquotienten, der Randdaten und der Funktionen $a(x,y)$ bzw. $b(x,y)$ ergeben sich die selben Gleichungen in den Knoten 2,4,5:

$$4\left[\frac{21}{16}\ln(\frac{3}{2}) + \frac{21}{16}\ln(\frac{3}{2}) + \frac{25}{16}\ln(2) + \frac{17}{16}u_3 - \frac{84}{16}u_i\right] = 4, \quad i \in \{1,2,4,5\}.$$

Oder kürzer geschrieben:

$$\frac{17}{16}u_3 - \frac{84}{16}u_i = -1.1473883784, \quad i \in \{1,2,4,5\}.$$

Damit gilt $u_1 = u_2 = u_4 = u_5$.

Im Knoten 3 ergibt sich

$$\frac{17}{16}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) - \frac{17}{4}u_3 = 1.$$

Zusammen folgt also

$$\begin{aligned} \tfrac{17}{16}u_3 \quad -\tfrac{84}{16}u_1 &= -1.1473883784, \\ u_3 \quad -u_1 &= \tfrac{4}{17}. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_4 = u_5 &= 0.2143, \\ u_3 &= -0.02099. \end{aligned}$$

G 40 (*Klassifizierung von partiellen DGLen*)

Gegeben sei die dreidimensionale partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2xu_{xy} + 2yu_{yz} = f(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z).$$

Man bestimme die Bereiche, in denen die Differentialgleichung elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist.

Hinweis: Gehen Sie analog zum 2D-Fall vor, indem Sie die Matrix der Koeffizienten vor den zweiten Ableitungen bestimmen und deren Eigenwerte untersuchen.

Die Matrix der Koeffizienten vor den 2. Ableitungen lautet

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & y \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_B(x) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & x & 0 \\ x & 1-\lambda & y \\ 0 & y & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)(x^2+y^2) = 0$$

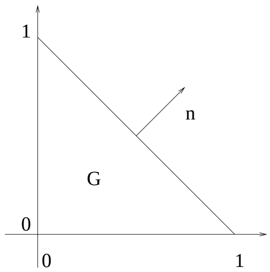
Es gilt also $\lambda_1 = 1$ *und* $\lambda_{2/3} = 1 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$. *Die DGL ist*

$$\begin{array}{lll} \textit{elliptisch} & \sqrt{x^2+y^2} < 1 & \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 1 \\ \textit{hyperbolisch} & \sqrt{x^2+y^2} > 1 & \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 > 1 \\ \textit{parabolisch} & \sqrt{x^2+y^2} = 1 & \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

Hausübung

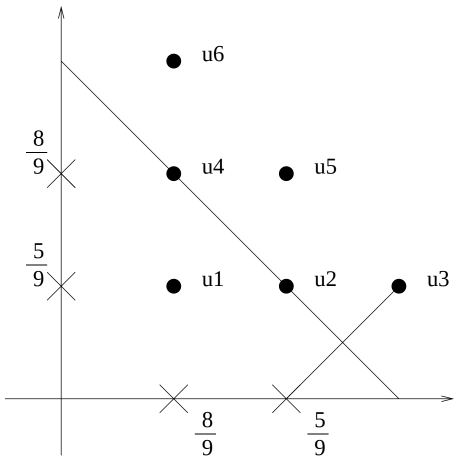
H 37 (*Diskretisierung von Randableitungen bei elliptischem RWP*)

Lösen Sie das Randwertproblem



$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & (x,y) &\in G, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1-x) &= 0, & x &\in [0,1], \\ u(x,0) &= 1-x^2, & x &\in [0,1], \\ u(0,y) &= 1-y^2, & y &\in [0,1] \end{aligned}$$

mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ und einer Diskretisierung der Randableitung von 2. Ordnung.



Für die sechs unbekannten Größen u_1 bis u_6 sind sechs Gleichungen zu bestimmen. Drei dieser Gleichungen resultieren aus der Diskretisierung der Randableitung und weitere drei aus der Standarddiskretisierung in den Punkten 1, 2 und 4.

Die Randableitungen werden durch zentrale Differenzenquotiente bestimmt.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}h}(u_3 - \tfrac{5}{9}) &= \frac{\partial u}{\partial n}(\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6}) + \mathcal{O}(h^2), \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}h}(u_5 - u_1) &= \frac{\partial u}{\partial n}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + \mathcal{O}(h^2), \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}h}(u_6 - \tfrac{5}{9}) &= \frac{\partial u}{\partial n}(\tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

und somit

$$u_3 = \frac{5}{9}, \quad u_5 = u_1 \quad \text{und} \quad u_6 = \frac{5}{9}.$$

Aus der Standarddiskretisierung in den Punkten 1, 2 und 4 folgt

$$\begin{aligned} 4u_1 - u_2 - u_4 - \tfrac{8}{9} - \tfrac{8}{9} &= h^2, \\ -u_1 + 4u_2 - u_3 - u_5 - \tfrac{5}{9} &= h^2, \\ -u_1 + 4u_4 - u_5 - u_6 - \tfrac{5}{9} &= h^2. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{9} \\ \frac{11}{9} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $u_1 = \frac{5}{6}$, $u_2 = u_4 = \frac{13}{18}$.

H 38 (*NumaWWW: Konvergenzrate Differenzenverfahren für Poisson-Gleichung*)
Auf dem NumaWWW-Server

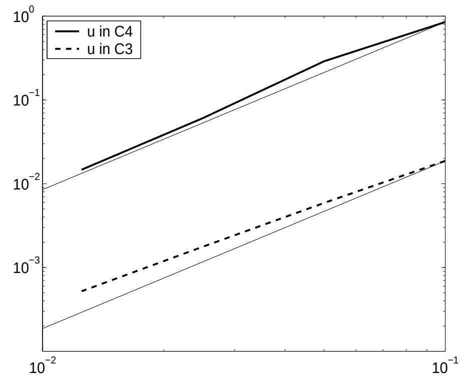
`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`

kann unter den Menüpunkten `partielle DGL's, Lösung der Helmholtz-Gleichung` das Standard-Differenzenverfahren zur Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = f(x, y)$$

auf einem rechteckigen Gebiet $G := [a, b] \times [c, d]$ mit gegebenen Daten f und $\lambda \leq 0$ getestet werden. Testen Sie zuerst das Verfahren mit den Voreinstellungen (u aus C^4 und u aus C^3) und approximieren Sie die Lösung mit $n = m = 10, 20, 40, 80$. Tragen Sie den ausgegebenen Fehler und die Schrittweite h $(= \frac{1}{N} = \frac{1}{M})$ in ein doppelt-logarithmisches Diagramm ein und überprüfen Sie, ob der Fehler des Verfahrens wie h^2 abnimmt.

Das Bild der Schrittweiten gegen den Fehler:



Die Geraden mit den dünneren Linien sind Geraden der Steigung 2. Wenn der Fehler sich genau wie h^2 verhalten würde, würden die Ergebnisse exakt auf solchen Geraden liegen. Für das erste Beispiel wird dies recht gut erfüllt, dagegen für u in C^3 nimmt der Fehler langsamer ab, was zu erwarten ist (siehe auch Erläuterungen auf der einführenden Seite im NumaWWW).