Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 12, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 35 (*Von Mises, Rayleigh-Quotient*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des VON MISES-Verfahrens für die Matrix A erfüllt sind, und dass $x_0 = e_3 = (0,0,1)^T$ ein geeigneter Startvektor ist.

b) Rechnen Sie drei Schritte **ohne** Normierung, und bestimmen Sie mit dem RAYLEIGHquotienten eine Näherung für den betragsgrößten Eigenwert.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für den relativen Fehler dieser Näherung und vergleichen Sie diese mit dem tatsächlichen relativen Fehler.

Hinweis: Der betragsgrößte Eigenwert lautet 10.20673 und der zugehörige Eigenvektor ist $(0.0956397, 0.10891060, 0.98944000)^T$.

a) *A erfüllt alle Voraussetzungen:*

- *Als symmetrische Matrix ist A diagonalähnlich.*
- *Es existiert ein betragsgrößter Eigenwert $\lambda \in [8, 12]$.*
- *Der Startvektor e_3 ist nicht senkrecht zum Eigenvektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ zu λ: Sei $v_3 = 0$. Dann liefert $(A - \lambda I)v = 0$ folgende Gleichungen:*

$$\begin{array}{lcrcl} (1-\lambda)v_1 & - & v_2 & = & 0 \\ (2-\lambda)v_2 & - & v_1 & = & 0 \\ v_1 & + & v_2 & = & 0 \end{array}$$

Die dritte Gleichung besagt $v_2 = -v_1$, was eingesetzt in die ersten beiden Gleichungen liefert:

$$\begin{array}{lcrcccl} (1-\lambda)v_1 & + & v_1 & = & (2-\lambda)v_1 & = & 0 \\ (2-\lambda)v_2 & + & v_2 & = & (3-\lambda)v_2 & = & 0 \end{array}$$

Wegen $\lambda \in [8, 12]$ folgt somit $v_1 = v_2 = 0$, also $v \equiv 0$. Da dies kein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, muss die Annahme $v_3 = 0$ falsch gewesen sein.

b) *Die Iterationsfolge lautet*

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 102 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 101 \\ 114 \\ 1041 \end{pmatrix}, \quad \frac{x_3}{\|x_3\|} = \begin{pmatrix} 0.0960001 \\ 0.1083565 \\ 0.9894659 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des RAYLEIGH-*Quotienten wird eine Näherung für λ bestimmt:*

$$\lambda \approx \frac{x_2^T A x_2}{x_2^T x_2} = \frac{x_2^T x_3}{x_2^T x_2} = \frac{11297605}{1106878} \approx \underline{\underline{10.20668}}$$

c) *Der relative Fehler ist nach Satz aus Vorlesung bzw. Skript*

$$\frac{|\lambda - R(x_2;A)|}{|\lambda|} \leq \frac{\|Ax_2 - R(x_2;A)x_2\|}{\|Ax_2\|} = \frac{\|x_3 - R(x_2;A)x_2\|}{\|x_3\|} = 1.94 \cdot 10^{-3}.$$

Der wirkliche relative Fehler liegt bei $4.9 \cdot 10^{-6}$. *Der Fehler im Eigenvektor liegt in der Größenordnung* $5 \cdot 10^{-4}$. *Damit sind die Aussagen des Satzes bestätigt.*

G 36 (*Wielandt-Verfahren*)

Gesucht ist der kleinste Eigenwert λ_3 der Matrix

$$\begin{pmatrix} 30 & 2 & 0 \\ 2 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Schätzen Sie λ_3 mit dem Satz von Gerschgorin ab.

b) Führen Sie einen Schritt des Wielandt-Verfahrens mit $\mu_0 = 10$ und $x_0 = (0,0,1)^T$ durch.

c) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu x_0, also aus $R(x_0; (A-\mu I)^{-1})$.

d) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu x_1, also aus $R(x_1; A)$, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus c).

a) *Nach dem Kreissatz von* Gerschgorin *liegt der kleinste Eigenwert* λ_3 *von* A *im Intervall* $[10-1, 10+1] = [9, 11]$.

b) *Mit dem Shift* $\mu = 10$ *erhält man die Matrix*

$$\tilde{A} = A - \mu I = A - 10I = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun muss das Gleichungssystem $(A - \mu I)x_1 = \tilde{A}x_1 = x_0$ *gelöst werden:*

$$\begin{array}{ccc|c} 20 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -98 & -10 & 0 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1/2 & +0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -9.8 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -9.8 \end{array}$$

Damit lautet $x_1 = (-0.1, 1, -9.8)^T$.

c) *Mit dem* Rayleigh*-Quotienten erhält man zuerst eine Näherung für den Eigenwert* $\sigma_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$ *von* $\tilde{A}^{-1} = (A - \mu I)^{-1}$:

$$\sigma_3 \approx R(x_0; \tilde{A}^{-1}) = \frac{x_0^T \tilde{A}^{-1} x_0}{x_0^T x_0} = \frac{x_0^T x_1}{x_0^T x_0} = \frac{-9.8}{1} = -9.8$$

Wegen $\lambda_3 = \mu + \frac{1}{\sigma_3}$ *liefert dies als neue Näherung für* λ_3*:*

$$\lambda_3 \approx \mu + \frac{1}{R(x_0; \tilde{A}^{-1})} = \mu + \frac{x_0^T x_0}{x_0^T x_1} = 10 + \frac{1}{-9.8} \approx 9.89796$$

d) *Andererseits kann man direkt über* $R(x_1; A)$ *gehen:*

$$R(x_1; A) = \frac{x_1^T A x_1}{x_1^T x_1} = \frac{x_1^T (A - \mu I) x_1}{x_1^T x_1} + \frac{x_1^T \mu I x_1}{x_1^T x_1} = \frac{x_1^T x_0}{x_1^T x_1} + \mu$$

Dies liefert die Näherung

$$\lambda_3 \approx R(x_1; A) = \mu + \frac{x_1^T x_0}{x_1^T x_1} = 10 + \frac{-9.8}{97.05} \approx 9.89902,$$

die sich kaum von der Näherung aus Aufgabenteil c) unterscheidet.

G 37 (*Selbstadjungierte Probleme*)

Die Randwertaufgabe

$$((1+x)^3 y')' + \sin(x) y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 1$$

soll unter Verwendung von Differenzenverfahren mit Gitterabstand $h = \frac{1}{n}$ gelöst werden.

a) Formen Sie die Differentialgleichung durch Ausdifferenzieren um und bestimmen Sie eine Diskretisierung mit Differenzenformeln zweiter Ordnung. Ist die erhaltene Matrix symmetrisch?

b) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung durch iteriertes Anwenden von Differenzenformeln zweiter Ordnung mit halbierter Schrittweite. Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung eine symmetrische Matrix liefert.

a) *Ausdifferenzieren liefert*

$$3(1+x)^2 y' + (1+x)^3 y'' + \sin(x) y = 0$$

und damit die Diskretisierung

$$3h(1+x_i)^2(y_{i+1} - y_{i-1}) + 2(1+x_i)^3(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + 2h^2 \sin(x_i) y_i = 0.$$

Schreibt man abkürzend $d_i = 2h^2 \sin(x_i) - 4(1+x_i)^3$, $a_i = 2(1+x_i)^3$ *und* $b_i = 3h(1+x_i)^2$, *so hat die Matrix die Form*

$$\begin{pmatrix} d_1 & a_1 + b_1 & 0 & \cdots & \\ a_2 - b_2 & d_2 & a_2 + b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & a_{n-2} - b_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} \\ & \cdots & 0 & a_{n-1} - b_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für allgemeines h *nicht symmetrisch.*

b) *Diskretisieren der Differentialgleichung liefert*

$$(1 + x_{i+1/2})^3 y'_{i+1/2} - (1 + x_{i-1/2})^3 y'_{i-1/2} + h \sin(x_i) y_i = 0$$

im ersten und

$$(1 + x_{i+1/2})^3 (y_{i+1} - y_i) - (1 + x_{i-1/2})^3 (y_i - y_{i-1}) + h^2 \sin(x_i) y_i = 0$$

im zweiten Schritt. Mit den Abkürzungen $d_i = h^2 \sin(x_i) - (1 + x_{i+1/2})^3 - (1 + x_{i-1/2})^3$ *und* $a_i = (1 + x_{i+1/2})^3$ *ergibt sich für die Matrix*

$$\begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \cdots & \\ a_1 & d_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & a_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-1} \\ & \cdots & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für alle h *symmetrisch.*

Hausübung

H 34 (*Vektoriteration mit falschen Voraussetzungen*)

Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sind reell und lauten der Größe nach geordnet $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (ohne Normierung) mit Startvektor $x^{(0)} = (1, 3, -1)^T$ durch. Folgern Sie daraus, dass für alle $k \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\varrho_k = -\frac{5}{11} \quad , \quad x^{(k)} = \begin{cases} x^{(0)}\,, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (1, -1, 3)^T\,, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

b) Mit a) ist gezeigt, dass die Folge der ϱ_k gegen einen falschen Wert konvergiert und die Folge der $x^{(k)}$ oszilliert, d.h. nicht konvergiert. Welche wesentliche Voraussetzung für die Konvergenz des Verfahrens von Mises ist in diesem Fall verletzt?

a) *Die Iterationsfolge lautet*

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \|x^{(0)}\|_2 = 1,$$

$$Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \|Ax^{(0)}\|_2 = 1 \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \varrho_0 = \frac{{x^{(1)}}^T x^{(0)}}{{x^{(0)}}^T x^{(0)}} = -\frac{5}{11},$$

$$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \|Ax^{(1)}\|_2 = 1 \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \varrho_1 = -\frac{5}{11}.$$

Offensichtlich oszilliert die Folge bei konstanten Rayleigh-Quotienten. Das Verfahren konvergiert nicht.

b) *Das Problem ist die Existenz zweier Eigenwerte mit maximalem Betrag:* $|1| = |-1| = 1$.

H 35 (*Differenzenverfahren*)

Die Randwertaufgabe

$$-y'' + x^2 y' + y^3 = -1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

soll mit einem Differenzenverfahren gelöst werden.

a) Diskretisieren Sie das Problem mit Gitterbreite $h = \frac{1}{n}$.

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix des Systems. Zeigen Sie, daß es sich dabei um eine irreduzibel diagonaldominante L-Matrix handelt.

a) Unter Verwendung der Differenzenformeln

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

und

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

erhält man das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= y_0 \\ 0 &= -2y_{i+1} + 4y_i - 2y_{i-1} + x_i^2 h(y_{i+1} - y_{i-1}) + 2h^2 y_i^3 + 2h^2 \qquad i \in \{1, \cdots, n-1\} \\ 0 &= y_n \end{aligned}$$

b) Differenzieren des Gleichungssystems liefert die Jacobimatrix

$$M(y) = \begin{pmatrix} 4+6h^2y_1^2 & -2+hx_1^2 & 0 & \cdots & \\ -2-hx_2^2 & 4+6h^2y_2^2 & -2+hx_2^2 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & -2-hx_{n-2}^2 & 4+6h^2y_{n-2}^2 & -2+hx_{n-2}^2 \\ & \cdots & 0 & -2-hx_{n-1}^2 & 4+6h^2y_{n-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen zunächst die L-Matrix-Eigenschaft und betrachten dazu die Vorzeichen der Einträge auf der Diagonalen, der Sub- und der Superdiagonalen. Aufgrund der Positivität der Quadrate ergibt sich sofort, daß die Diagonalelemente ≥ 4*, die Subdiagonalelemente* ≤ -1 *sind. Für die Superdiagonalelemente schätzen wir ab: Es ist* $0 < h \leq 1$ *und* $0 \leq x_i \leq 1$*, und damit* $-2 + hx_i^2 \leq -1$*. Insbesondere folgt damit, daß alle diese Elemente von Null verschieden sind, und damit bereits auch die Irreduzibilität der Matrix.*
Zur Überprüfung der Diagonaldominanz vergleichen wir die Beträge der Diagonalelemente mit der Summe der Beträge der Einträge der betreffenden Zeile. Die erste Zeile liefert $4 + 6h^2y_1^2 \geq 4 > 2 \geq 2 - hx_1^2$*, die zweite bis vorletzte Zeile* $4 + 6h^2y_i^2 \geq 4 = 2 - hx_i^2 + 2 + hx_i^2$*, die letzte Zeile* $4 + 6h^2y_{n-1}^2 \geq 4 > 3 \geq 2 + hx_{n-1}^2$ *(wegen* $0 < h \leq 1$ *und* $0 \leq x_{n-1} \leq 1$*).*

H 36 (*Praktische Aufgabe: v. Mises - Verfahren*)

Implementieren Sie das von Mises-Verfahren oder benutzen Sie die Implementierung dieses Verfahrens in *NumaWWW*:

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`

Testen Sie es an Matrizen, die Sie sich folgendermaßen generieren:

$$A := T\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)T^T,$$

wobei

$$T_{i,j} = \sin\left(\frac{i \cdot j \cdot \pi}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{n+1}}\right).$$

und $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Was passiert für $|\lambda_1| = |\lambda_2|$? Was im Falle von $|\lambda_1| >> |\lambda_2|$?

Eine mögliche Implementierung ist unten aufgeführt. Falls $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, *ist die Konvergenz nicht mehr sichergestellt. Dagegen beschleunigt sie sich für* $|\lambda_1| >> |\lambda_2|$.

```
function []=vmises(d,N,xnull)

n=size(d,2);
D=diag(d);

% Generiere T
for i=1:n
    for j=1:n
        T(i,j)=sin((i*j*pi)/(n+1))*sqrt(2/(n+1));
    end % j
end % i

% Generiere A
A=T*D*T';

% Mises Iteration
x(:,1)=xnull/norm(xnull);
l(1)=x(:,1)'*A*x(:,1);

for i=2:N
    xtemp=A*x(:,i-1);
    x(:,i)=xtemp/norm(xtemp);
    l(i)=x(:,i)'*A*x(:,i);
end % i

% Ausgabe der Iteration
x
l
```