

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 11, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 32 (*Gesamtschrittverfahren, Einzelschrittverfahren, SOR-Verfahren*)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie zum Startvektor $x^{(0)} = (-6, -6)^T$ jeweils drei Schritte des Gesamt-, Einzelschritt und SOR-Verfahrens mit $\omega = 1.125$ durch.
- Erstellen Sie eine Skizze, die die beiden Gleichungen des Systems als Geraden interpretiert und ergänzen Sie die Skizze um die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

im Falle des Einzelschritt und des SOR-Verfahrens und um

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

im Falle des Gesamtschrittverfahrens. Interpretieren Sie!

- Zunächst einmal zerlegt man die Matrix und erhält:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und } U = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– Gesamtschrittverfahren:

Hier berechnen wir zunächst

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und damit } D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit

$$D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lautet die Iterationsvorschrift:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_k^{(2)} + 2 \\ \frac{1}{2}x_k^{(1)} + 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \dots$$

– Einzelschrittverfahren:

Wir beginnen mit

$$(-L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ was } (-L + D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ergibt. Zusammen mit

$$(-L + D)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_k^{(2)} + 2 \\ \frac{1}{3}x_k^{(2)} + 2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}, \dots$$

– SOR-Verfahren:

Auch hier beginnt man mit der Berechnung der auftretenden Matrizen:

$$(-\omega L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ bzw. } (\omega U + (1 - \omega)D) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu

$$(-\omega L + D)^{-1} \cdot (\omega U + (1 - \omega)D) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{9}{128} & \frac{19}{64} \end{pmatrix}.$$

In Kombination mit

$$(-\omega L + D)^{-1}wb = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{153}{64} \end{pmatrix}$$

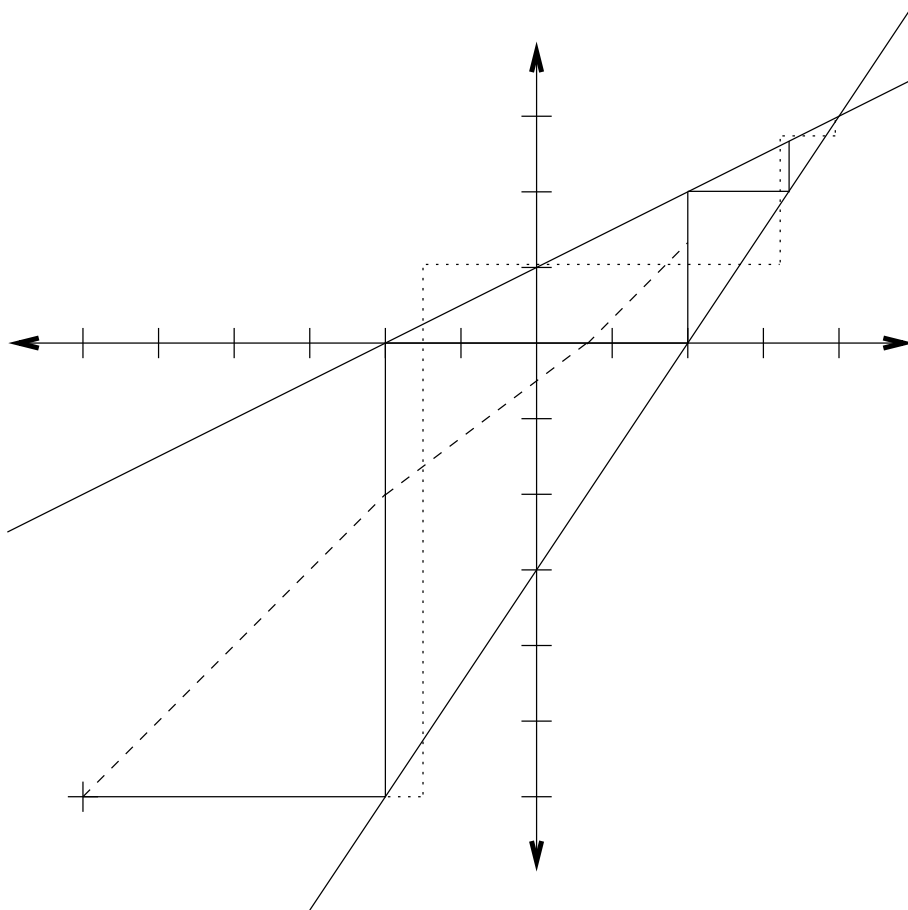
resultiert die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}x_k^{(1)} + \frac{3}{4}x_k^{(2)} + \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{128}x_k^{(1)} + \frac{19}{64}x_k^{(2)} + \frac{153}{64} \end{pmatrix}.$$

Daraus generiert sich die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{33}{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.21094 \\ 2.80225 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.95032 \\ 2.99677 \end{pmatrix}, \dots$$

- b) Die Skizze zeigt den Verlauf der drei Verfahren. Dem Einzelschrittverfahren entsprechen durchgezogene Linien, dem Gesamtschrittverfahren gestrichelte und dem SOR Verfahren gepunktete.



Dies kann in 2-d wie folgt gedeutet werden: Das Einzelschrittverfahren verändert zuerst die x -Komponente, so dass die erste Gleichung des LGS erfüllt ist. Die x -Komponente wird dann festgehalten, während die y -Komponente so verändert wird, dass die zweite Gleichung erfüllt ist.

Das SOR-Verfahren läuft sehr ähnlich ab: Zuerst Änderung der x -Komponente, so dass die erste Gleichung erfüllt ist. Diese Änderung der ersten Komponente wird dann aber noch um ω gestreckt, man schießt sozusagen über die Gerade, die die erste Gleichung darstellt, hinaus. Von dort aus wird die y -Komponente so verändert, dass die zweite Gleichung erfüllt ist. Und wieder wird die Änderung um den Faktor ω gestreckt (bzw. überrelaxiert. Daher auch die Bezeichnung SOR = Successive Overrelaxation).

Das Gesamtschrittverfahren kann man so interpretieren: Zunächst wird berechnet, wie man die x -Komponente verändern müsste, damit die erste Gleichung erfüllt wäre. Diese Änderung wird aber noch nicht durchgeführt. Dann wird berechnet, wie man die y -Komponente ändern müsste, damit die zweite Gleichung erfüllt wäre. Und erst dann werden die beiden Änderungen durchgeführt.

G 33 (Eigenschaften von Matrizen)

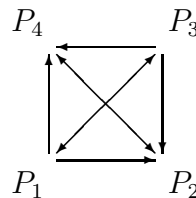
Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 21 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3+a & 0 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

auf die Eigenschaften Irreduzibilität, strikte und irreduzible Diagonaldominanz, L- und M-Matrix.

• Matrix A

- Irreduzibilität: Der gerichtete Graph, der der Matrix A zugeordnet werden kann hat die Gestalt



Damit ist die Matrix reduzibel, da z.B. kein Weg von P_2 nach P_1 existiert, und damit kann sie nicht irreduzibel diagonal dominant sein.

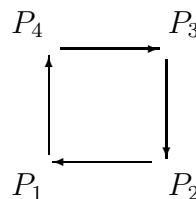
- Die Matrix A ist strikt diagonal dominant, da

$$\begin{aligned} 11 &> 3 + 2 + 1 \\ 3 &> 2 \\ 21 &> 6 + 3 + 4 \\ 11 &> 2 \end{aligned}$$

- A ist weder L- noch M-Matrix.

• Matrix B

- Irreduzibilität: Der gerichtete Graph, der der Matrix B zugeordnet werden kann hat die Gestalt



Damit ist die Matrix irreduzibel für alle a, da a nur auf der Diagonalen steht.

- Unabhängig von a ist die Matrix B nicht strikt diagonal dominant aber
- irreduzibel diagonal dominant für $a < -6$ oder $a > 0$:

$$\begin{aligned} |3+a| &> 3 \quad \text{für } a < -6 \quad \text{oder } a > 0 \\ 4 &\geq 4 \\ 3 &\geq 3 \\ 2 &\geq 2 \end{aligned}$$

- B ist eine L -Matrix für $a > -3$ und damit als irreduzibel diagonaldom. L -Matrix ($a > 0$)
- eine M -Matrix für $a > 0$.

G 34 (Konvergenz des ESV)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_i &= 3x_{i+1} + b_i, & i = 1, \dots, n-1, \\x_n &= b_n.\end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, daß das Einzelschritt-Verfahren für alle Startwerte konvergiert.
 b) Berechnen Sie mit $b = (0, \dots, 0, -3, 1)^T$, $n = 100$ und $x^{(0)} = (0, \dots, 0)^T$ den Fehler $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ für alle Iterierten $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

a) Die Matrix des Gleichungssystems lautet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & & 0 \\ & 1 & -3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -3 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

und die Iterationsmatrix $M = -(A_D + A_L)^{-1}A_R$ lautet

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & & 0 \\ & 0 & 3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 3 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

M ist also nilpotent und hat als einzigen Eigenwert $\lambda = 0$. Das charakteristische Polynom lautet

$$(-1)^n \lambda^n = 0.$$

Damit ist der Spektralradius $\rho(M) = 0$, und das Verfahren konvergiert. Ferner ist $M^n = 0$, und damit ist das Verfahren nach maximal n Schritten beendet.

b) Für den Fehler gilt

$$x^{(k)} - x^* = M^k(x^{(0)} - x^*).$$

Die exakte Lösung lautet $x^* = e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$. Folglich ergibt sich mit $x^{(0)} = (0, \dots, 0)^T$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty = \|M^k e_n\|_\infty.$$

Aus der Form der Matrix M kann man nun folgende Rekursion ablesen:

$$\begin{aligned} M e_n &= 3e_{n-1}, \\ M^2 e_n &= 9e_{n-2}, \\ &\vdots \\ M^k e_n &= \begin{cases} 3^k e_{n-k} & \text{falls } k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Der Fehler hat also die Gestalt

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty = \begin{cases} 3^k & \text{falls } k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Offensichtlich entfernt sich die Näherung zunächst rasant von der Lösung, bevor im n -ten Schritt die exakte Lösung erreicht wird. D.h., die Reduktion des Fehlers mit dem Spektralradius als Faktor tritt erst nach ausreichend vielen Schritten auf.

Hausübung

H 31 (CG-Verfahren)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) Rechnen Sie zwei Schritte mit dem *cg*-Verfahren und dem Startvektor $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- b) Zeigen Sie, dass die beiden Richtungen p_0 und p_1 aus a) *A*-orthogonal zueinander sind.
- c) Tragen Sie die Iterationsschritte in ein (ξ_1, ξ_2) -Koordinatensystem ein, und zeichnen Sie zusätzlich die Höhenlinien der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ durch die Punkte x_0, x_1 und x_2 .

Hinweis: Bei den Höhenlinien handelt es sich um Ellipsen, deren Hauptachsen Vielfache der Eigenvektoren der Matrix *A* sind.

a) *Der erste Iterationsschritt stimmt mit dem Gradientenverfahren überein.*

$$\begin{array}{rcl}
 r_0 = Ax_0 - b & = & \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \hline
 p_0 = r_0 & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \sigma_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0} & = & \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \\
 x_1 = x_0 - \sigma_0 p_0 & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 r_1 = Ax_1 - b & = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \hline
 p_1 = r_1 + \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} p_0 & = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{4 \cdot 9} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \sigma_1 = \frac{r_1^T p_1}{p_1^T A p_1} & = & \frac{18 \cdot 16}{8 \cdot 54} = \frac{2}{3} \\
 x_2 = x_1 - \sigma_1 p_1 & = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 r_2 = Ax_2 - b & = & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

b) *Nach Definition ist zu zeigen, dass $p_0^T A p_1 = 0$ gilt:*

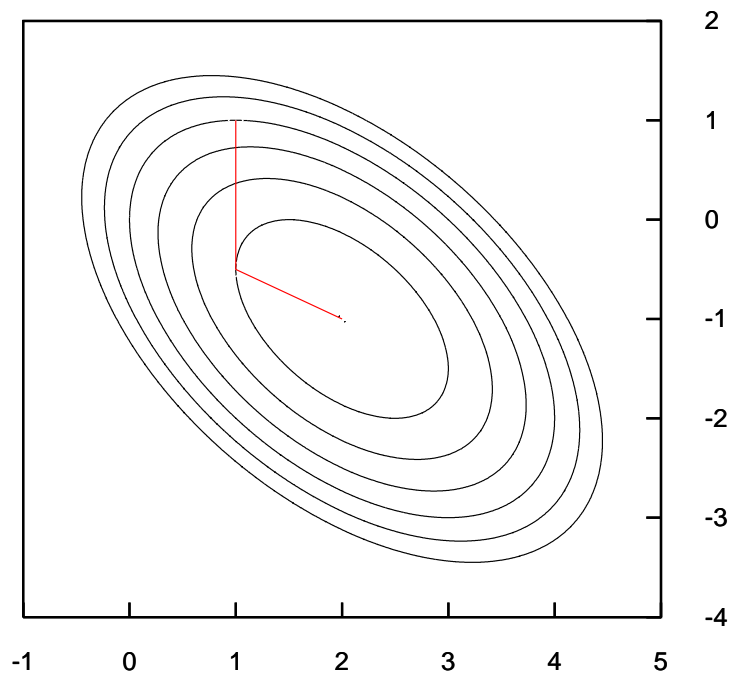
$$p_0^T A p_1 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

c) Mit gegebenem A und b rechnet man für $f(x)$ aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 + 2\xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2) - 3\xi_1 \\ &= \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - 3\xi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 + 1 + 1 - 3 = 0, \\ f(x_1) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 3 = -\frac{9}{4}, \\ f(x_2) &= 4 - 2 + 1 - 6 = -3. \end{aligned}$$

Die nachfolgende Skizze zeigt einige Höhenlinien der Funktion $f(x)$ im (ξ_1, ξ_2) -Koordinatensystem, außerdem die Punkte x_0 , x_1 und x_2 sowie die Abstiegsrichtungen p_0 und p_1 . Man sieht, dass die Abstiegsrichtung p_1 nicht senkrecht zur Höhenlinie durch x_1 ist!



H 32 (Konvergenz Gesamtschritt-, Einzelschrittverfahren)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie Einzel- und Gesamtschrittverfahren auf Konvergenz.

- Für die Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahren gilt

$$G = - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist dann

$$\det(G - \lambda I) = -\lambda^3 + 1 - 1 - 2\lambda + 2\lambda + 0.25\lambda = -\lambda^3 + 0.25\lambda,$$

es hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \sqrt{0.25} = \pm 0.5$$

und damit ist $\rho(G) = 0.5$, d.h. (globale) Konvergenz.

- Nun zum Einzelschrittverfahren:

$$G = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & -0.25 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich das charakteristische Polynom

$$\det(G - \lambda I) = -\lambda((-0.25 - \lambda)(1 - \lambda) - 0.75) = -\lambda(\lambda^2 - 0.75\lambda - 1)$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 0.375 \pm \sqrt{1 + (0.375)^2},$$

womit $\rho(G) = 1.443000$ folgt. Also existieren zu jeder rechten Seite b Startvektoren, für die das Iterationsverfahren nicht konvergiert).

H 33 (Gauß-Seidel-Verfahren, Schlecht konditionierte Matrix)

Um das Verfahren von Gauß-Seidel für schlecht konditionierte Matrizen zu testen, betrachten wir die L-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} n & -a & \dots & -a & -a \\ -a & n & \dots & -a & -a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a & -a & \dots & n & -a \\ -a & -a & \dots & -a & n \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq a < \frac{n}{n-1}$, wobei n die Dimension, d.h. die Größe der Matrix A angibt.

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das zunächst die Dimension n und einen Parameter $frac$ einliest. Der Parameter bestimmt den Wert von a mit

$$a = (frac * n) / (1.0 * (n - 1));$$

so dass für $frac$ nahe 1 der Wert von a gegen seine obere Grenze wandert. Diese Grenze garantiert jedoch die Eigenschaft der L-Matrix von A .

Nun soll ein Gleichungssystem $Ax = b$ erstellt werden, zu dem wir schon die exakte Lösung $xsol$ kennen.

$$\begin{aligned} A &= -a * ones(n, n) + (n + a) * eye(n); \\ xsol &= ones(n, 1); \\ b &= A * xsol; \end{aligned}$$

Anschließend soll diese Lösung zurückgerechnet werden, und zwar mit dem Verfahren von Gauß-Seidel auf acht Stellen genau, d.h.

$$norm(xneu - xsol, inf) \leq 10^{(-8)} * norm(xsol, inf);$$

Als Ausgabe ist die benötigte Schrittzahl sowie die Konditionszahl der Matrix A , die jedoch auch direkt mit $cond = \frac{n+a}{a+(1-a)*n}$ (woher?) angegeben werden kann, erwünscht.

Testen Sie das Programm mit den Werten $n = 100$, dem Nullvektor als Startvektor sowie $frac = 0.5, 0.9, 0.99$ und 0.999 , und untersuchen Sie die Ergebnisse auf Zusammenhänge.