Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 10, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 29 (*Modifiziertes Newtonverfahren*)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \arctan(x)$.

a) Bestimmen Sie zu $f(x)$ die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens und des modifizierten Newtonverfahrens.

b) Führen Sie mit $x^0 = 10$ einen Newtonschritt aus und überprüfen Sie, ob die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$|f(x^1)| \;<\; |f(x^0)|.$$

c) Geben Sie für das modifizierte Newtonverfahren die Anzahl der Halbierungen von λ an, die notwendig sind, um die Bedingung aus b) zu erfüllen.

a) $f(x) = \arctan(x), \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow x^{k+1} = x^k - \lambda_k \arctan(x^k)(1 + (x^k)^2)$

Beim Newtonverfahren $\lambda_k = 1$ für alle k.

b) $x^1 = 10 - \arctan(10)(1 + 100) = -138.58$

$$\left.\begin{array}{rcl} |f(x^0)| & = & 1.47 \\ |f(x^1)| & = & 1.56 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |f(x^1)| > |f(x^0)|$$

c) *modifiziertes Newtonverfahren* $\lambda_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}\}$

$\lambda = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^1 = -64.29 \quad f(x^1) = -1.55$

$\lambda = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x^1 = -27.15 \quad f(x^1) = -1.53$

$\lambda = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad x^1 = -8.57 \quad f(x^1) = -1.45$

Also muss λ dreimal halbiert werden, damit $|f(x^1)| < |f(x^0)|$

G 30 (*Newtonverfahren in 2D*)

Das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 e^{(1-x_2)} \\ 5x_1 - 5x_2 + 4 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem Newton–Verfahren gelöst werden. Bestimmen Sie $x^{(1)}$ für den Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Jacobimatrix der Funktion F ist gegeben durch

$$\mathcal{J}_F(x) = \begin{pmatrix} 4 & -(1-x_2)e^{(1-x_2)} \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Für

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (\mathcal{J}_F(x^{(k)}))^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.05 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

G 31 (*Vereinfachtes Newtonverfahren in 2D*)

Das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 e^{(1-x_2)} \\ x_1 - 10x_2 + 8 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem vereinfachten Newton–Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - AF(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gelöst werden. Die Matrix A sei dabei gegeben durch $A := (\mathcal{J}_F(\bar{x}))^{-1}, \bar{x} = (1, 1)^T$.

a) Schreiben Sie das Verfahren als Picard-Iteration, d.h. in der Form

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und zeigen Sie, daß die Iteration für alle Startwerte $x^{(0)}$ aus $\mathcal{D} := \mathbb{R} \times [0, 2]$ konvergiert.

Hinweis: Benutzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Wieviele Schritte des Verfahrens sind erforderlich, um mit $x^{(0)} = \bar{x}$ eine Genauigkeit von $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-3}$ zu garantieren ?

Hinweis: Vereinfachen Sie die Iterationsfunktion vor dem Einsetzen der Zahlen. Der Nachweis der Selbstabbildungseigenschaft ist einfacher durch direktes Nachrechnen.

c) Bestimmen Sie $x^{(3)}$. Was fällt auf? Vergleichen Sie die Resultate mit b).

a) *Die Jacobimatrix der Funktion F ist gegeben durch*

$$\mathcal{J}_F(x) = \begin{pmatrix} 4 & -(1 - x_2)e^{(1-x_2)} \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} := \mathcal{J}_F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Approximation der Newton-Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

und die Iterationsfunktion $\Phi(x)$ *lautet*

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \begin{pmatrix} x_1 - x_1 + \frac{1}{4}x_2e^{(1-x_2)} \\ x_2 - \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{40}x_2e^{(1-x_2)} + \frac{1}{10}x_1 - x_2 + \frac{8}{10} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \frac{1}{40}x_2e^{(1-x_2)} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Konvergenz kann der Fixpunktsatz von Banach verwendet werden. Zu zeigen sind dann, daß (1.) Φ *eine Kontraktion ist, (2.)* $\mathcal{D}$ *abgeschlossen ist und (3.)* Φ *eine Selbstabbildung von* $\mathcal{D}$ *ist. Die Kontraktion wird mit Hilfe von Satz 5.3.1 gezeigt.*

$$\mathcal{J}_\Phi(x) = \frac{1}{40}(1-x_2)e^{(1-x_2)} \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\|\mathcal{J}_\Phi(x)\|_\infty = \frac{1}{4}|1-x_2|e^{(1-x_2)} \le \frac{e}{4} \quad \text{für} \quad 0 \le x_2 \le 2.$$

Als Lipschitz-Konstante kann somit $L = \frac{e}{4} \approx 0.6796 < 1$ *gewählt werden. Damit ist* Φ *eine Kontraktion in* $\mathcal{D}$*. Die Selbstabbildung von* $\mathcal{D}$ *wird lediglich durch die zweite Komponente eingeschränkt, da* $x_1 \in \mathbb{R}$*. Für* Φ_2 *gilt*

$$\begin{aligned}\Phi_2(x) &= \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{40}x_2e^{(1-x_2)} \le \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{40} \cdot 2e < 1 < 2 \\ \Phi_2(x) &= \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{40}x_2e^{(1-x_2)} \ge \tfrac{4}{5} > 0.\end{aligned}$$

Da zusätzlich $\mathcal{D}$ *abgeschlossen ist folgt mit dem Fixpunktsatz von Banach die Konvergenz für alle Startpunkte aus* $\mathcal{D}$*.*

b) *Mit* $x^{(0)} = (1,1)^T$ *ergibt sich* $x^{(1)} = (0.25, 0.825)^T$*, also* $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 0.75$*. Nach dem Fixpunktsatz von Banach gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \le \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty.$$

An k *ist also die Forderung*

$$\begin{aligned}\tfrac{L^k}{1-L}0.75 &\le 10^{-3} && \Leftrightarrow \\ L^k &\le \tfrac{4}{3}(1-L)10^{-3} && \Leftrightarrow \\ k\ln L &\le \ln(\tfrac{4}{3}(1-L)10^{-3}) && \Leftrightarrow (\ln L < 0) \\ k &\ge \tfrac{\ln(\frac{4}{3}(1-L)10^{-3})}{\ln L} \approx 20.009 &&\end{aligned}$$

zu stellen. Nach höchstens 21 Schritten ist die Genauigkeitsforderung erfüllt.

c)

$$\begin{aligned}x^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & + & 0.245695 \\ 0.8 & + & 0.024570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.245695 \\ 0.824570 \end{pmatrix} \\ x^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & + & 0.245672 \\ 0.8 & + & 0.024567 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.245672 \\ 0.824567 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung aus Teil b) ist offensichtlich sehr grob.

Hausübung

H 28 (*Divisionsfreie Division*)

Um den Kehrwert einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ zu bestimmen, ohne eine Division durchzuführen, verwenden einige Computer ein Schema, das auf dem Newton–Verfahren basiert. Hierzu sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} - a$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens so, dass keine Division Verwendung findet.

b) Berechnen Sie für $a = 0.75$ und den Startwert $x^{(0)} = 1.5$ zwei Schritte der Newton–Iteration.

c) Veranschaulichen Sie das Resultat an einer Skizze.

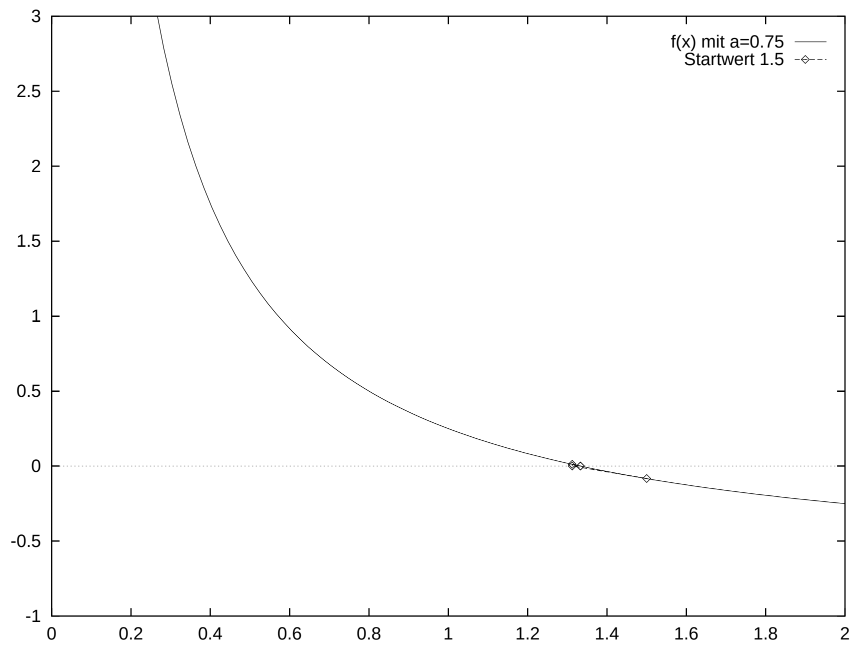
a) *Die Ableitung von f ist gegeben durch $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Damit lautet das Newton–Verfahren*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{\frac{1}{x^{(k)}} - a}{-\frac{1}{(x^{(k)})^2}} \\ &= x^{(k)} + \left(\frac{1}{x^{(k)}} - a\right)(x^{(k)})^2 \\ &= 2x^{(k)} - a(x^{(k)})^2 \end{aligned}$$

b) *Die Iterationsfolge lautet*

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 1.5 \\ x^{(1)} &= 1.3125 \\ x^{(2)} &= 1.333007813 \end{aligned}$$

c) *Eine Skizze zeigt das Verhalten der Folge.*



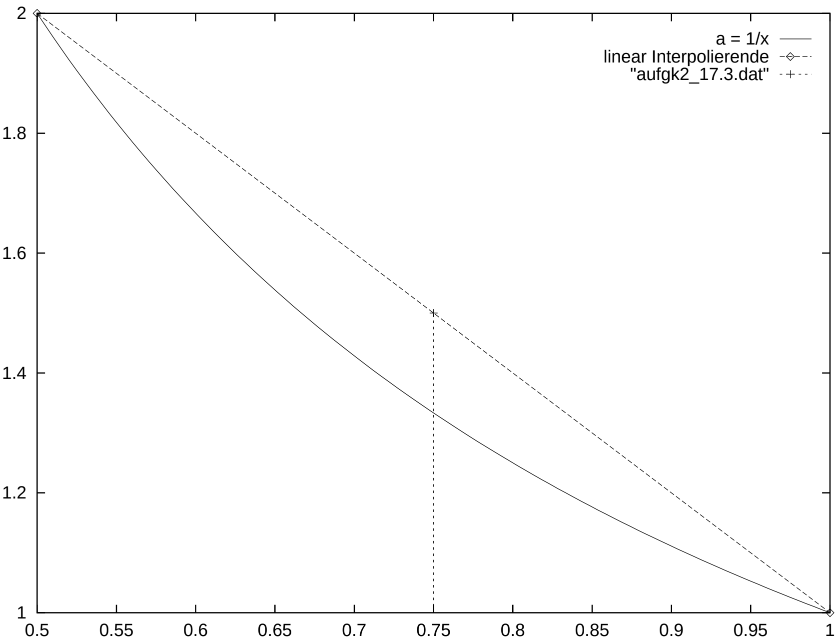
Das Newtonverfahren konvergiert hier nicht für alle Startwerte. Frage: Was sind hier sinnvolle Startwerte ?

Bemerkung: *Den Startwert erhält man durch eine erste Näherung, bei der man linear interpoliert. D.h. für ein $a \in \mathbb{R}$ sucht man ein $x \in \mathbb{R}$ so dass*

$$a - \frac{1}{x} = 0.$$

Da hier $a = 0.75$ ist, betrachten wir auch nur das Intervall $[0.5, 1[$ für a. Das Reziprok von 1 ist 1 bzw. von 0.5 ist 2. Wenn man nun linear interpoliert, das bedeutet man berechnet den Wert von x auf der Geraden, die die Punkte $(0.5, 2)$ und $(1, 1)$ verbindet, so erhält man für $a = 0.75$ die Näherung

$$x = 2 + (0.75 - 0.5)\frac{2-1}{0.5-1} = 1.5.$$



Diese Näherung nimmt man anschließend als Startwert für das Newton-Verfahren.

H 29 (*Vereinfachtes Newton-Verfahren*)

Man beweise unter Verwendung des vereinfachten Newton-Verfahrens

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - AF(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $A := (\mathcal{J}_F(0,0))^{-1}$ und durch Anwendung geeigneter Sätze, dass die Funktion

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y + \frac{1}{3}(x^2+y^2)x + 0.2 \\ 2x + 4y + \frac{1}{3}(x^2+y^2)y - 0.2 \end{pmatrix}$$

im Quadrat $-0.4 \le x, y \le 0.4$ genau eine Nullstelle besitzt. Ein geeigneter Startwert ist $x^{(0)} = (0,0)^T$.

Die Jacobimatrix der Funktion F ist gegeben durch

$$\mathcal{J}_F(x) = \begin{pmatrix} 3 + x^2 + \frac{1}{3}y^2 & 2 + \frac{2}{3}xy \\ 2 + \frac{2}{3}xy & 4 + \frac{1}{3}x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} := \mathcal{J}_F(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Approximation der Newton-Matrix gegeben durch

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

und die Iterationsfunktion $\Phi(x)$ lautet

$$\Phi(x) = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x^2+y^2)x + 0.2 \\ \frac{1}{3}(x^2+y^2)y - 0.2 \end{pmatrix}$$

Die Jacobimatrix von $\Phi(x)$ ist somit

$$\mathcal{J}_\Phi(x) \quad = \quad -\tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3}y^2 & \frac{2}{3}xy \\ \frac{2}{3}xy & \frac{1}{3}x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Die Kontraktion wird mit Hilfe von Satz 5.3.1 gezeigt. Für $(x,y) \in [-0.4, 0.4]^2$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_\Phi(x)\|_\infty &\leq \tfrac{1}{8} \cdot 6 \cdot (0.4)^2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \tfrac{6}{25} = 0.24 < 1 \end{aligned}$$

Eine mögliche Lipschitzkonstante ist demnach $L = 0.24$.

Die Selbstabbildung wird auch mit Satz 5.3.1 nachgewiesen.

$$x^{(1)} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\delta = \|x^{(0)} - x^{(1)}\|_\infty \frac{1}{1-L} = \frac{3}{20} \cdot \frac{25}{25-6} = 0.1974 < 0.4.$$

Damit ist die Selbstabbildung auf einer Teilmenge von $[-0.4, 0.4]^2$ gezeigt und die Existenz der Lösung ist gesichert.

H 30 (*NumaWWW: Schnittpunkte von Ellipsen*)
Auf dem NumaWWW-Server

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`

kann unter den Menüpunkten `nichtlineare Gleichungssysteme`, `zweidimensionales Newton-Verfahren` auf einfache Weise das 2-D Newton–Verfahren erprobt werden. Die Lösung der folgenden Aufgabe kann allerdings auch mit dem Taschenrechner berechnet werden.

Es sollen die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1$$

mit dem Newton–Verfahren bestimmt werden. Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = \binom{1.5}{1.8}$ mindestens zwei Schritte des Newton–Verfahrens aus. Wenn Sie die WWW-Seite zur Berechnung benutzen, so verwenden Sie ebenfalls die Startpunkte $x^{(0)} = \binom{-0.1}{-0.1}, \binom{100}{50}, \binom{1}{0}$.

Die Funktion, deren zweidimensionale Nullstelle gesucht wird, ist

$$F(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} - 1 \\ \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} - 1 \end{pmatrix}.$$

Deren Jacobi–Matrix ist gegeben durch

$$\mathcal{J}_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 & \frac{2}{9}x_2 \\ \frac{2}{9}x_1 & \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Das Newton–Verfahren lautet

$$\begin{array}{lrcl} \text{Löse das LGS} & \mathcal{J}_F(x^{(k)})d^{(k)} & = & -F(x^{(k)}) \\ \text{und setze} & x^{(k+1)} & = & x^{(k)} + d^{(k)}. \end{array}$$

Die Iterationsfolge lautet

k	$x^{(k)}$	$-F(x^{(k)})$	$\mathcal{J}_F(x^{(k)})$	$d^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0775 \\ -0.06 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.4 \\ 0.\overline{3} & 0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.173077 \\ -0.130769 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1.6730769 \\ 1.6692307 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00938897 \\ -0.00760355 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.836538 & 0.37094 \\ 0.371795 & 0.834615 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00895225 \\ -0.0051223 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1.6641247 \\ 1.6641085 \end{pmatrix}$			
$\vdots$				
∞	$\begin{pmatrix} 1.6641006 \\ 1.6641006 \end{pmatrix}$			