Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 8, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 22 (*LR-Zerlegung von Tridiagonalmatrizen*)

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche eine LR-Zerlegung der Matrix $A = LR$.

b) Wieviele Matrixelemente müssen allgemein eliminiert werden, wenn man den Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche auf eine Tridiagonalmatrix anwendet?

c) Welche Besetzungsstruktur haben L^{-1}, R^{-1} und A^{-1} in unserem Beispiel?

a)

1	2	1	0	0	1	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	1	0	0	$II = II - \frac{1}{2}I$
3	0	1	2	1	0	0	1	0	
4	0	0	1	2	0	0	0	1	

1	2	1	0	0	1	0	0	0	
2	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	
3	0	1	2	1	0	0	1	0	$III = III - \frac{2}{3}II$
4	0	0	1	2	0	0	0	1	

1	2	1	0	0	1	0	0	0	
2	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	
3	0	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	
4	0	0	1	2	0	0	0	1	$IV = IV - \frac{3}{4}III$

1	2	1	0	0	1	0	0	0	
2	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	
3	0	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	
4	0	0	0	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	1	

Damit erhalten wir

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es müssen die unteren Nebendiagonalelemente eliminiert werden. Bei einer $n \times n$ Matrix sind dies gerade $n-1$ Elemente. Somit werden für den Gauß-Algorithmus $\mathcal{O}(n)$ viele Multiplikationen/Additionen benötigt, statt $\mathcal{O}(n^3)$ im allgemeinen Fall.

c) *Die Inverse von R wird berechnet, indem mit dem Gaußverfahren die Gleichungssysteme $Rx = e_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gelöst werden, wobei e_i der i-te Einheitsvektor sei:*

2	1			0	$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{5}$
	$\frac{3}{2}$	1		0	$\Rightarrow x_2 = \frac{2}{5}$
		$\frac{4}{3}$	1	0	$\Rightarrow x_3 = -\frac{3}{5}$
			$\frac{5}{4}$	1	$\Rightarrow x_4 = \frac{4}{5}$

2	1			0	$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$
	$\frac{3}{2}$	1		0	$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$
		$\frac{4}{3}$	1	1	$\Rightarrow x_3 = \frac{3}{4}$
			$\frac{5}{4}$	0	$\Rightarrow x_4 = 0$

2	1			0	$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$
	$\frac{3}{2}$	1		1	$\Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$
		$\frac{4}{3}$	1	0	$\Rightarrow x_3 = 0$
			$\frac{5}{4}$	0	$\Rightarrow x_4 = 0$

2	1			0	$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$
	$\frac{3}{2}$	1		0	$\Rightarrow x_2 = 0$
		$\frac{4}{3}$	1	0	$\Rightarrow x_3 = 0$
			$\frac{5}{4}$	1	$\Rightarrow x_4 = 0$

Somit erhält man

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ & & \frac{3}{4} & -\frac{3}{5} \\ & & & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend berechnet man

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = R^{-1}L^{-1} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Somit sind L^{-1} und R^{-1} vollbesetzte untere bzw. obere Dreiecksmatrizen. Außerdem ist A^{-1} eine vollbesetzte Matrix. Die Bandstruktur geht also im allgemeinen bei Invertierung der Matrix verloren, nur die Dreiecksgestalt bleibt erhalten.

G 23 (*Einheitssphären von Normen*)

a) Skizzieren Sie die Einheitssphäre $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^2$ zu der euklidischen Norm $\|x\|_2$, der Maximumnorm $\|x\|_\infty$ und der Summennorm $\|x\|_1$.

b) Skizzieren Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Menge $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$.
Hinweis: Eine lineare Abbildung wie z.B. $x \to Ax$ bildet Geraden auf Geraden ab. Der Schnittpunkt zweier Geraden wird auf den Schnittpunkt ihrer Bildgeraden abgebildet.

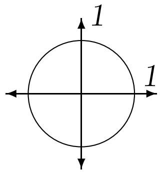
c) Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$ der Matrix A bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

d) Veranschaulichen Sie diese Konditionszahl mit Hilfe der Skizze aus Aufgabenteil b) und unter Verwendung von

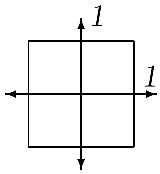
$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \text{ und } \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}.$$

a)

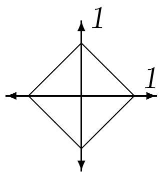
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$



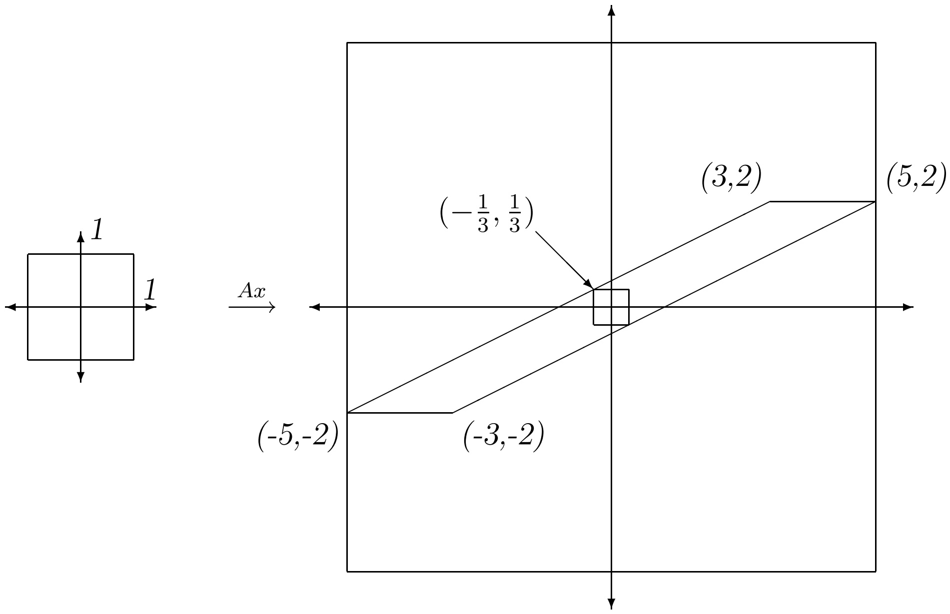
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$



$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$



b)



c) *Es ist*

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

und daher gilt:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= max\{1+4, 2\} = 5, \quad \|A^{-1}\|_\infty = max\left\{1+2, \frac{1}{2}\right\} = 3, \\ cond_{\|\cdot\|_\infty}(A_1) &= 5 \cdot 3 = 15. \end{aligned}$$

d) *Mit dem Hinweis kommt man zu dem Zusammenhang*

$$cond_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}.$$

Damit ist die Konditionszahl direkt aus der Skizze ablesbar als Quotient aus der Größe der umschreibenden Sphären und der einbeschriebenen Sphäre.

$$\left.\begin{array}{rl} \textit{umschreibend:} & \{x \mid \|x\|_\infty = 5\} \\ \textit{einschreibend:} & \{x \mid \|x\|_\infty = \frac{1}{3}\} \end{array}\right\} \Rightarrow cond_{\|\cdot\|_\infty} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15.$$

Oder in anderen Worten, als der Quotient aus den ∞-Normen der Punkte mit dem größten Abstand zum Nullpunkt und dem Punkt mit dem kleinsten Abstand zum Nullpunkt, jeweils gemessen in der ∞-Norm.

G 24 (*Untere Schranke für die Konditionszahl*)

Bei einem linearen Gleichungssystem für 3 Unbekannte erhielt man folgende Resultate (bei exakter Rechnung):

$$Ax_1 = b_1 \quad b_1 = (0.9, 0.7, 0.6)^T \quad x_1 = (1.0, -1.2, 1.3)^T$$

$$Ax_2 = b_2 \quad b_2 = (0.901, 0.698, 0.601)^T \quad x_2 = (1.0, -2.0, 2.0)^T$$

Geben Sie eine untere Schranke für die Konditionszahl von A in $\|.\|_\infty$ an.

Mit

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

gilt die Fehlerabschätzung (Skript):

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty} \leq cond_\infty(A) \frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty}$$

Hieraus folgt:

$$cond_\infty(A) \geq \frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|b_1 - b_2\|_\infty} \frac{\|b_1\|_\infty}{\|x_1\|_\infty} = \frac{0.8}{2 \cdot 10^{-3}} \frac{0.9}{1.3} = 276.92$$

G 25 (*Cholesky-Zerlegung*)

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Cholesky–Zerlegung von A. Ist die Matrix positiv definit?

Die Cholesky–Zerlegung von $A = LL^T$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2 \\
l_{21} &= \tfrac{1}{l_{11}} a_{21} = \tfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \\
l_{31} &= \tfrac{1}{l_{11}} a_{31} = \tfrac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\[1em]
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2 - (-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \\
l_{32} &= \tfrac{1}{l_{22}} (a_{32} - l_{21} l_{31}) = \tfrac{1}{1}(3 - (-1) \cdot 0) = 3 \\[1em]
l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{13 - (0)^2 - (9)^2} = \sqrt{4} = 2
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$L = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist somit positiv definit, da die Cholesky-Zerlegung existiert und regulär ist (alle Diagonalelemente von L sind strikt positiv).

Hausübung

H 22 (*Spektralradius und Matrixnormen*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -100 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Spektralradius

$$\rho(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\lambda| : \det(A - \lambda I) = 0\}$$

sowie die Matrixnormen $\|A\|_\infty, \|A\|_1, \|A\|_2$.

Der Spektralradius $\rho(A)$ ist der Betrag des betragsmäßig größten Eigenwertes. Die Eigenwerte sind gegeben als die Lösungen der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$*:*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -100 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0.$$

Daraus folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Also ist $\rho(A) = 1$.

Die $\|A\|_1$ ist das Maximum der Summen der Spaltenbeträge. Somit gilt $\|A\|_1 =$ Summe der Beträge in der 3. Spalte $= |-100| + |1| = 101$.

Die $\|A\|_\infty$ bildet sich als das Maximum der Summen der Zeilenbeträge. $\|A\|_\infty =$ Summe der Beträge in der 1. Zeile $= |-100| + |1| = 101$.

Für eine reelle Matrix A ist $\|A\|_2^2$ gegeben durch den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwertes von A^TA. Die Eigenwerte von A^TA sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \det(A^TA - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -100 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -100 & 0 & 10001-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(10001-\lambda) - 10000(1-\lambda) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3}$ als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - 10002\lambda + 1 = 0.$$

Es folgt $\lambda_2 = 5001 - \sqrt{25010000} = 0.0001$ und $\lambda_3 = 5001 + \sqrt{25010000} = 10001{,}9999$. Somit gilt $\|A\|_2 = \sqrt{10001{,}9999} = 100{,}009999$.

H 23 (*Verwendung der Zerlegung für Invertierbarkeit*)

Zeigen Sie, dass folgende Matrizen invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & -0.8 \\ 0.5 & 1 & 0.1 \\ 0.3 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir zerlegen $A = I + H$. Wir wählen als Matrixnorm die $\|\cdot\|_1$–Norm und erhalten:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & -0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.3 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|H\|_1 = \max(0.8, 0.5, 0.9) = 0.9 < 1$$

Damit ist $A = I + H$ invertierbar.

H 24 (*Programmieraufgabe: Direkte Löser für LGS*)

(Sie können aber auch alternativ sich das NumaWWW anschauen: unter

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`

können Sie im Bereich "Lineare GS" den Gauß-Algorithmus mit und ohne Pivotsuche benutzen oder auch sich die Beispiele für Cholesky-Zerlegung anschauen)

Zu lösen sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Schreiben Sie jeweils ein `matlab`–Programm, das

a) die LR–Zerlegung ohne Spaltenpivoting,

b) die LR–Zerlegung mit Spaltenpivoting, bzw.

c) die Cholesky–Zerlegung

der Koeffizientenmatrix A berechnet und als Ausgabe die untere Dreiecksmatrix L, die obere Dreiecksmatrix R und – falls nötig – die Permutationsmatrix P liefert. Nehmen Sie an, dass A jeweils die nötigen Voraussetzungen für die Existenz der Zerlegungen erfüllt. Testen Sie ihre Programme an dem folgenden Beispiel. Gegeben sei die Hilbertmatrix H, $H_{ij} = 1/(i+j-1)$ für $i, j = 1, .., n$ und die rechten Seite $b = e_1$ mit $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Die exakte Lösung ist durch

$$x_i = (-1)^{i+1} i \binom{n+i-1}{n-1} \binom{n}{n-i}$$

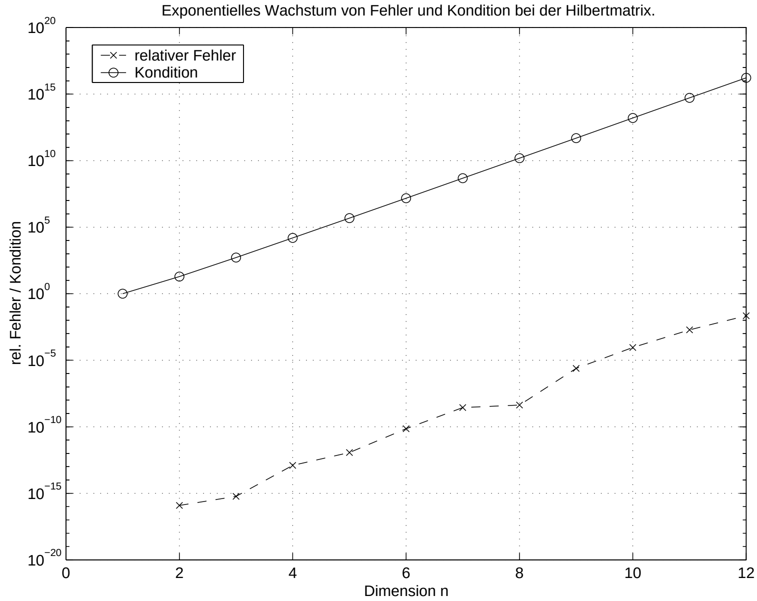
gegeben. Vergleichen Sie den relativen Fehler Ihrer berechneten Lösung $\tilde{x}$ von $Hx = e_1$ für $n = 1, \dots, 12$ mit der Kondition der Matrix. Erzeugen Sie dazu ein Diagramm mit logarithmisch skalierter y–Achse. Tragen Sie sowohl den relativen Fehler Δx_{rel} der berechneten Lösung als auch die Kondition $\mathrm{cond}_2(H)$ der Hilbertmatrix in der euklidischen Norm ein. Was beobachten Sie und wie erklären Sie die Ergebnisse?

Hinweis: Sie erhalten eine Hilbertmatrix mit dem Befehl `hilb`. Ein halblogarithmisches Diagramm läßt sich mit `semilogy` erzeugen. Der Befehl `norm` liefert die euklidische Länge eines Vektors und `cond` gibt die euklidische Kondition einer Matrix aus.
Versuchen Sie Ihre `matlab`–Programme effizienter zu machen, indem Sie vektororientiert programmieren.

Als Beispiel sei das folgende `matlab`*–Programm zur* Cholesky*–Zerlegung vollständig abgedruckt. Beachten Sie die vektororientierte Variante, die in* `matlab` *effizienter ist.*

```
function L=cholesky(A)
% CHOLESKY. Berechnet die untere Dreicksmatrix L der Choleskyzerlegung.
% Aufruf : L=cholesky(A)
% Eingabe: A = symmetrische, positiv definite Matrix
% Ausgabe: L = untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen,
%              die zur Cholesky-Zerlegung A=L*(L.') gehoert.

[n,m]=size(A);
if n~=m error('*** Fehler *** : Matrix nicht quadratisch'); end

L=zeros(n);                      % initialisiere L

for j=1:1:n

   % Konventionelle Programmierung mit FOR-Schleifen:
   %sum=0;                        % berechne das Diagonalelement L(j,j)
   %for k=1:1:j-1
   %   sum=sum+L(j,k)*L(j,k);
   %end % for k
   %L(j,j)=sqrt(A(j,j)-sum);
   %
   %for i=j+1:n                  % berechne die Elemente in der Spalte j
   %   sum=0;                     % unterhalb des Diagonalelementes
   %   for k=1:j-1
   %      sum=sum+L(i,k)*L(j,k);
   %   end % for k
   %   L(i,j)=(A(i,j)-sum)/L(j,j);
   %end % for i

   % MATLAB-Variante:
   jx=1:(j-1);
   L(j,j)=sqrt(  A(j,j)-sum(L(j,jx).^2)  );
   ix=(j+1):n;
   L(ix,j)=(  A(ix,j)-sum(L(ix,jx)*(L(j,jx)'),2)  )/L(j,j);

end % for j

% Ende. CHOLESKY.
```

Das folgende Diagramm vergleicht die Kondition und den tatsächlich festgestellten Fehler beim Beispiel mit der Hilbertmatrix. Man erkennt, dass die Kondition exponentiell mit der Matrixdimension n wächst. Der Fehler zeigt ein analoges Verhalten, wobei für wachsendes n die Anzahl der gültigen Stellen schnell abnimmt.



Dieses Diagramm wurde mit dem folgenden `matlab`*–Code erzeugt, wobei Sie für die Funktion* `LoeseLGS jeweils Ihren Löser einzusetzen haben.`

```
function [rel_error,condition]=hilbertplot
% HILBERTPLOT.

N=12;
for n=1:N
   H    =hilb(n);
   H_inv=invhilb(n);

   e_1=zeros(n,1); e_1(1)=1;
   x_1=LoeseLGS(H,e_1);
   x=zeros(n,1);
   for i=1:n
      x(i)=(-1)^(i+1)*i*nchoosek(n+i-1,n-1)*nchoosek(n,n-i);
   end % for i
   x;
   rel_error(n)=norm(x_1-x)/norm(x);
   condition(n)=cond(H);
end

semilogy([1:N],rel_error,'--x',[1:N],condition,'-o');
grid on;
title('Exp. Wachstum von Fehler und Kondition bei der Hilbertmatrix.');
xlabel('Dimension n');
ylabel('rel. Fehler / Kondition');
```

```
legend('relativer Fehler','Kondition');
```