

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 6, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 16 (*A*-Stabilität)

Zur Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

werde das implizite Verfahren

$$x_{k+1} = x_k + \tau ((1 - \sigma)f(t_k, x_k) + \sigma f(t_{k+1}, x_{k+1})), \quad \sigma \in (0, 1)$$

benutzt. Für welche σ ist das Verfahren *A*-stabil?

Das Verfahren angewendet auf das Modellproblem $\dot{x} = \lambda x$ liefert mit $z = \tau \lambda$ die Vorschrift

$$(1 - \sigma z)x_{k+1} = (1 + (1 - \sigma)z)x_k$$

oder

$$x_{k+1} = R(z)x_k,$$

mit

$$R(z) = \frac{1 + (1 - \sigma)z}{1 - \sigma z}.$$

Um $|R(z)|$ abzuschätzen, setze $z = a + ib$:

$$\begin{aligned} |R(z)| &\leq 1 \\ |1 + (1 - \sigma)z| &\leq |1 - \sigma z| \\ (1 + (1 - \sigma)a)^2 + (1 - \sigma)^2 b^2 &\leq (1 - \sigma a)^2 + \sigma^2 b^2 \\ 2a + (a^2 + b^2)(1 - 2\sigma) &\leq 0 \end{aligned}$$

Damit das Verfahren *A*-stabil ist, muß diese Ungleichung für $a \leq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ erfüllt sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $1 - 2\sigma \leq 0$, bzw. $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

G 17 (*Explizites und implizites Euler-Verfahren*)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(t) = -3y(t) + 1 + 3t, \quad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie mit dem expliziten und impliziten Eulerverfahren jeweils eine Näherung von $y(t)$ im Intervall $[0, 4]$ mit Schrittweite $h = 1$.

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung

$$y(t) = t + e^{-3t}.$$

Können Sie einen Grund für das unterschiedliche Verhalten nennen? (Beide Verfahren haben Konsistenzordnung 1.)

Für das explizite Eulerverfahren, angewandt auf die gegebene Differentialgleichung, erhält man die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + h(-3y_i + 1 + 3t_i) = -2y_i + 1 + 3t_i, \\y_0 &= 1.\end{aligned}$$

Dabei ist $t_i = i$, $i = 0, \dots, 3$. Damit erhält man die Näherung

t_i	y_i
0	1
1	-1
2	6
3	-5
4	20

Für das implizite Eulerverfahren, angewandt auf die gegebene Differentialgleichung, erhält man die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + h(-3y_{i+1} + 1 + 3t_{i+1}) = y_i - 3y_{i+1} + 1 + 3t_{i+1}, \text{ d. h.} \\y_{i+1} &= \frac{1}{4}(y_i + 1 + 3t_{i+1}) \\y_0 &= 1\end{aligned}$$

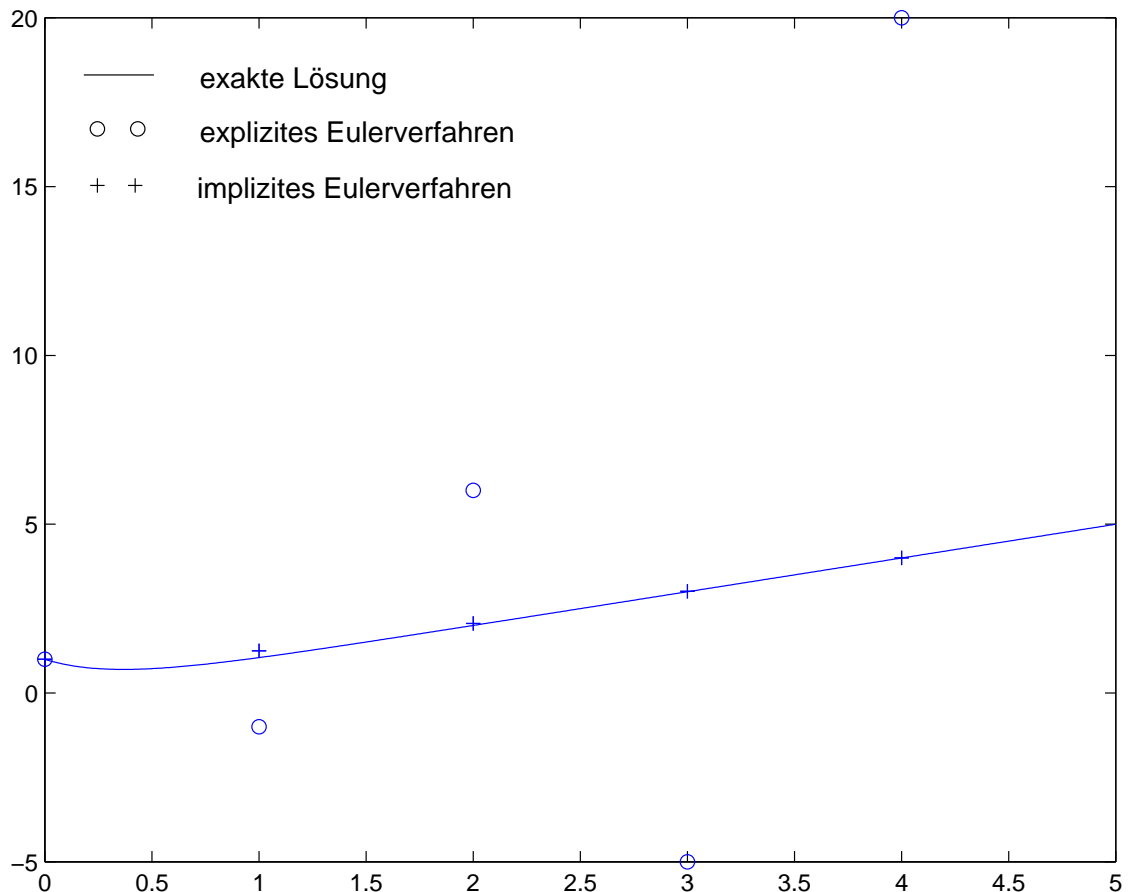
mit $t_i = i$, $i = 0, \dots, 3$. Damit erhält man die Näherung

t_i	y_i
0	1
1	$1 + \frac{1}{4}$
2	$2 + \frac{1}{16}$
3	$3 + \frac{1}{64}$
4	$4 + \frac{1}{256}$

Vergleicht man die Lösungen miteinander, so stellt man fest, daß das explizite Eulerverfahren eine sehr schlechte Lösung liefert, die auch qualitativ nichts mit der exakten Lösung gemeinsam hat. Das implizite Eulerverfahren liefert trotz großer Schrittweite von 1 eine gute Näherung der exakten Lösung.

Der Grund für die Diskrepanz liegt in dem exponentiell fallenden Anteil e^{-3t} . Dieser Anteil spielt für der Lösung für $t \geq 1$ nur eine minimale Rolle. (Z.B. ist $y(4) = 4 + 6.1442 \cdot 10^{-6}$.) Dieser Anteil wird vom expliziten Eulerverfahren sehr schlecht angenähert. (Die Funktion $t \rightarrow e^{-4t}$ ist streng monoton fallend und überall positiv. Wird die Funktion an einer Stelle durch ihre Tangente im Punkt $t \geq 0$ genähert, so erhält man ausgehend von dem Berührungspunkt (t, e^{-4t}) bei einer Schrittweite, die nicht klein genug gewählt wurde, negative Werte, obwohl die Funktion überall positiv ist.)

Ein Indiz für das schlechte Verhalten des expliziten Eulerverfahrens ist der betragsmäßig große, negative Koeffizient -2 vor y_i . Dieser Koeffizient sorgt für die Vorzeichenwechsel und das betragsmäßig starke Anwachsen der Näherung des expliziten Eulerverfahrens. Beim impliziten Eulerverfahren ist dieser Koeffizient $\frac{1}{4}$, was ein Dämpfen des Anteils von y_i an der Näherung y_{i+1} zur Folge hat. (Der dominierende Anteil in y_{i+1} ist $\frac{3}{4}t_i$.)



G 18 (*Gerschgorin*)

Die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 60 & -120 & 1 \\ 0.1 & 1 & -10000 \end{bmatrix}$$

soll mit dem expliziten Eulerverfahren integriert werden. Wie groß kann die Diskretisierungsschrittweite h gewählt werden, wenn bei beliebigem $y_0 = y_0^h$ die Bedingung $y_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ mit $h > 0$ erfüllt sein soll? Begründen Sie Ihre Wahl.

Die Untersuchung der Gerschgorin-Kreise von A und A^T liefert, dass es drei verschiedene Eigenwerte gibt, die folglich auch reell sein müssen. Die Intervalle auf der reellen Achse sind $[-2, 0]$, $[-122, -118]$ und $[-10001, -9999]$. Sie liegen alle in der negativen komplexen Halbebene.

Der Betrag des größten Eigenwertes lässt sich durch 10001 abschätzen. Die Stabilitätsfunktion des expliziten Euler-Verfahrens ist $R(h\lambda) = 1 + h\lambda$ und die Stabilitätsbedingung ist daher $h < \frac{2}{|\lambda|}$ und durch die Wahl

$$h < \frac{2}{10001} \approx 0,00019998$$

können wir die oben genannte Bedingung erfüllen und das korrekte Verhalten sicherstellen.

Hausübung**H 16** (Stabilität)

Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- a) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion und überprüfen Sie, ob das Verfahren A-stabil ist.
- b) Berechnen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens für die DGL $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$.
- a) Zum Nachweis der A-Stabilität muß das Gebiet der absoluten Stabilität

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |g(z)| < 1\}.$$

bestimmt werden. Dabei ist $g(z)$ die Stabilitätsfunktion, die sich ergibt, wenn man das zu untersuchende Verfahren auf die Testgleichung $y' = \lambda y$ anwendet und die entstehende Gleichung in der Form

$$y_{i+1} = g(h \cdot \lambda)y_i$$

schreibt. Das Verfahren heißt dann A-stabil, wenn

$$G \supset \{z : \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

Durch Anwenden von

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = f(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}hk_1) \\ k_2 = f(x + \frac{3}{4}h, y + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2) \\ \Phi_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

auf die Testgleichung $y' = \lambda y$ erhält man

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda(y + \frac{1}{4}hk_1) \\ k_2 &= \lambda\left(y + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2\right). \end{aligned}$$

Auflösen nach k_1 und k_2

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{4}\lambda h} y_i \\ k_2 &= \frac{(1 + \frac{1}{4}\lambda h)\lambda y_i}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} \end{aligned}$$

und Einsetzen in Φ ergibt

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + h\Phi \\
 &= y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\
 &= y_i + \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda}{1 - \frac{1}{4}\lambda h} y_i + \frac{(1 + \frac{1}{4}\lambda h)\lambda y_i}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} \right) \\
 &= y_i + \frac{h}{2} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)\lambda + (1 + \frac{1}{4}\lambda h)\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\
 &= y_i + \frac{h}{2} \cdot \frac{2\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\
 &= y_i + \frac{h\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\
 &= \frac{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2 + h\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\
 &= \frac{(1 + \frac{1}{4}\lambda h)^2}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{(1 + \frac{1}{4}z)^2}{(1 - \frac{1}{4}z)^2}$$

Das Gebiet der absoluten Stabilität ist durch alle komplexen Zahlen gegeben, die die Bedingung

$$\left| \frac{(1 + \frac{1}{4}z)^2}{(1 - \frac{1}{4}z)^2} \right| < 1,$$

bzw.

$$|(z + 4)^2| < |(z - 4)^2|.$$

bzw.

$$|z + 4| < |z - 4|.$$

erfüllen. Geometrisch kann man dies in der komplexen Zahlenebene interpretieren als die Menge der Punkte, deren Abstand von der Zahl -4 (Abstand = $|z + 4|$) echt kleiner ist der Abstand zum Punkt 4 (Abstand = $|z - 4|$). Dies sind aber genau die Punkte, deren Realteil $\operatorname{Re}(z) < 0$ ist. Damit ist das Verfahren A-stabil.

b) Um die Konsistenzordnung auszurechnen, betrachtet man die Differenz

$$y(t_{i+1}) - y_{i+1}.$$

Es gilt mit der Taylorreihe:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \frac{h^3}{6}y'''(t_i) + \mathcal{O}(h^4).$$

Andererseits gilt nach Aufgabenteil (a) (alle Glieder mit h in der Potenz höher als 3 werden bei allen Schritten gleich unter $\mathcal{O}(h^4)$ zusammengefasst):

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{4}h\lambda\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{4}h\lambda\right)^2} y_i = \left(1 + \frac{h\lambda}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4}h\lambda + \frac{1}{16}h^2\lambda^2 + \frac{1}{64}h^3\lambda^3 + \mathcal{O}(h^4)\right)^2 y_i \\
 &= \left(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{h^2\lambda^2}{16}\right) \left(1 + \frac{1}{16}h^2\lambda^2 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{8}h^2\lambda^2 + \frac{1}{64}h^3\lambda^3 + \mathcal{O}(h^4)\right) y_i \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{16}h^2\lambda^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{3}{16}h^2\lambda^2 + \frac{1}{64}h^3\lambda^3 + \mathcal{O}(h^4)\right) y_i \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{3}{16}h^2\lambda^2 + \frac{1}{64}h^3\lambda^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{4}h^2\lambda^2 + \frac{3}{32}h^3\lambda^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{16}h^2\lambda^2 + \frac{1}{32}h^3\lambda^3 + \mathcal{O}(h^4)\right) y_i \\
 &= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{7}{64}h^3\lambda^3 + \mathcal{O}(h^4)\right) y_i.
 \end{aligned}$$

Aus der gegebenen DGL folgt für ein genügend oft differenzierbares y :

$$\begin{aligned}
 y' &= \lambda y \\
 \rightarrow y'' &= (y')' = (\lambda y)' = \lambda^2 y \\
 \rightarrow y''' &= (y'')' = (\lambda^2 y)' = \lambda^3 y.
 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{7}{64}h^3\lambda^3 + \mathcal{O}(h^4)\right) y_i \\
 &= y_i + hy'_i + \frac{1}{2}h^2y''_i + \frac{7}{64}h^3y'''_i + \mathcal{O}(h^4)
 \end{aligned}$$

und

$$y(t_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{11}{192}h^3y'''(t_i) + \mathcal{O}(h^4).$$

Damit ist die Konsistenzordnung des gegebenen Runge-Kutta-Verfahrens (bei der gegebenen DGL) genau 2.

H 17 (Kreissatz von Gerschgorin)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.7 & 0 \\ -0.7 & 5 & -0.7 \\ 0 & -0.7 & 7 \end{pmatrix}.$$

- a) Begründen Sie, warum die Eigenwerte von A reell sind und geben Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Intervalleinschließung für die Eigenwerte an.
- b) Führen Sie eine Ähnlichkeitstransformation auf die Matrix $B = S^{-1}AS$ mit einer Diagonalmatrix $S = \text{diag}(1, \delta, \delta^2)$ durch. Dabei bleiben die Eigenwerte unverändert. Wählen Sie verschiedene Werte für $\delta > 0$, die zur Verbesserung der Eigenwertabschätzung mit Hilfe des Kreissatzes von Gerschgorin geeignet sind. Versuchen Sie insbesondere möglichst kleine, disjunkte Intervalle für $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ anzugeben.

- a) Die Matrix A ist symmetrisch, damit sind alle Eigenwerte reell. Die Gerschgorin-Kreise sind gegeben durch

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\lambda : |3 - \lambda| \leq 0.7\} \\ K_2 &= \{\lambda : |5 - \lambda| \leq 1.4\} \\ K_3 &= \{\lambda : |7 - \lambda| \leq 0.7\}. \end{aligned}$$

Diese Kreise sind nicht disjunkt, sondern K_2 überschneidet sich mit K_1 und K_3 . Demnach kann man nur sagen, daß die Eigenwerte im Bereich $[2.3, 7.7]$ liegen.

- b) Die Matrix B lautet

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & -0.7\delta & 0 \\ -0.7\frac{1}{\delta} & 5 & -0.7\delta \\ 0 & -0.7\frac{1}{\delta} & 7 \end{pmatrix}.$$

Die Gerschgorin-Kreise sind

$$\begin{aligned} K_1(\delta) &= \{\lambda : |3 - \lambda| \leq 0.7\delta\} \\ K_2(\delta) &= \{\lambda : |5 - \lambda| \leq 0.7(\delta + \frac{1}{\delta})\} \\ K_3(\delta) &= \{\lambda : |7 - \lambda| \leq 0.7\frac{1}{\delta}\}. \end{aligned}$$

Versucht man nun den Abstand zwischen den Kreisen K_1 und K_2 zu maximieren, so führt das auf die Aufgabe

$$\max_{\delta > 0} \Delta_{1,2}(\delta) = 2 - 0.7\delta - 0.7(\delta + \frac{1}{\delta})$$

Ableiten und zu Null setzen ergibt

$$\Delta'_{1,2}(\delta) = -1.4 + 0.7\frac{1}{\delta^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Kreise sind dann

$$\begin{aligned} K_1(\delta_{1,2}) &= \{\lambda : |3 - \lambda| \leq 0.49497\} \\ K_2(\delta_{1,2}) &= \{\lambda : |5 - \lambda| \leq 1.48492\} \\ K_3(\delta_{1,2}) &= \{\lambda : |7 - \lambda| \leq 0.98995\}. \end{aligned}$$

Ein analoges Vorgehen mit den Kreisen K_2 und K_3 ergibt $\delta_{2,3} = \sqrt{2}$ und damit die Kreise

$$\begin{aligned} K_1(\delta_{2,3}) &= \{\lambda : |3 - \lambda| \leq 0.98995\} \\ K_2(\delta_{2,3}) &= \{\lambda : |5 - \lambda| \leq 1.48492\} \\ K_3(\delta_{2,3}) &= \{\lambda : |7 - \lambda| \leq 0.49497\}. \end{aligned}$$

Disjunkte Intervalle sind demnach $\lambda_1 \in [3 - 0.49497, 3 + 0.49497]$, $\lambda_3 \in [7 - 0.49497, 7 + 0.49497]$ und $\lambda_2 \in [5 - 1.48492, 5 + 1.48492]$.

H 18 (Programmierübung: MATLAB oder NumaWWW)

Zu lösen sei das folgende AWP

$$\dot{x} = -12x, \quad x \in [0, 1], \quad x(0) = 1$$

mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$.

- Implementieren sie dazu das explizite EULER-Verfahren.
- Implementieren sie dazu das implizite EULER-Verfahren.
- Geben sie die Ergebnisse dazu jeweils graphisch aus.

a) Der Ansatz für den expliziten Euler lautet

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = -12x_i \quad \iff \quad x_{i+1} = (1 - 12h)x_i.$$

b) Analog für den impliziten Euler

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = -12x_{i+1} \quad \iff \quad x_{i+1} = \frac{1}{12h + 1} x_i.$$

c) Die exakte Lösung des AWP's lautet

$$x(t) = e^{-12t}.$$

Ein Vergleich mit den numerischen Lösungen:

