Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 5, Lösungsvorschlag

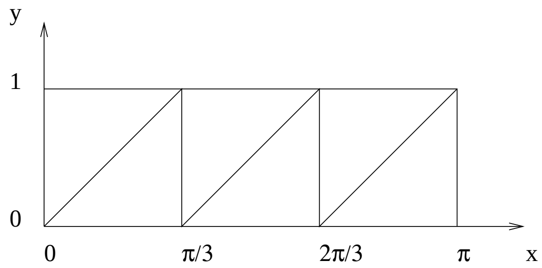
Gruppenübung

G 13 (*Mehrdimensionale Quadratur mittels Schwerpunktregel*)

Bestimmen Sie mit der Schwerpunktregel eine Näherung des Integrals

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{e^y}{1+\cos(2x)+\cos(y)}\,dx\,dy$$

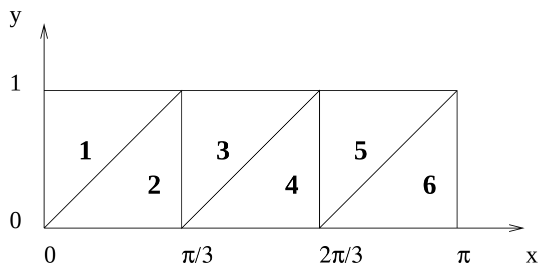
unter Verwendung der Zerlegung



Die Schwerpunktregel für eine beliebige Triangulation mit Dreiecken T_i und den zugeordneten Schwerpunkten $(x_S, y_S)_i$ ist

$$I \approx \sum_i |T_i| f((x_S, y_S)_i).$$

Die sechs Dreiecke T_i der Triangulation sollen wie folgt numeriert werden



Die Fläche eines Dreiecks beträgt $|T_i| = \frac{\pi}{6}$.

Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreiecks sind genau die Mittelwerte der entsprechenden Koordinaten seiner Eckpunkte:

$$x_S = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \textit{und} \quad y_S = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

Die Schwerpunkte und die entsprechenden Funktionsauswertungen lauten also

Dreieck	(x_S, y_S)	$f(x_S, y_S)$
T_1	$(\frac{\pi}{9}, \frac{2}{3})$	*0.7632391*
T_2	$(\frac{2\pi}{9}, \frac{1}{3})$	*0.6587411*
T_3	$(\frac{4\pi}{9}, \frac{2}{3})$	*2.3017565*
T_4	$(\frac{5\pi}{9}, \frac{1}{3})$	*1.3883039*
T_5	$(\frac{7\pi}{9}, \frac{2}{3})$	*0.9939775*
T_6	$(\frac{8\pi}{9}, \frac{1}{3})$	*0.5147959*
		$\Sigma = 6.6208141$

Die Integralnäherung ist somit $I \approx \frac{\pi}{6} 6.6208141 = 3.4666501$.

G 14 (*Verschiedene Verfahren*)

Man betrachte das Anfangswertproblem $y' = f(x,y), y(a) = y_a$ mit

$$f(x,y) = -2xy^2 \quad \text{und} \quad a = 1, y_a = \frac{1}{2}.$$

Approximieren Sie die Lösung des gegebenen Problems mit jeweils einem Schritt:

a) des Euler-Verfahrens (vorwärts),

b) des Heun-Verfahrens,

c) des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung

unter Verwendung der Schrittweite $h = 0.1$ und vergleichen Sie die Resultate mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Stellen Sie für die betrachteten Verfahren das jeweilige Butcher-Schema auf.

Alle drei Verfahren können als Runge-Kutta-Verfahren interpretiert werden:

Euler vorwärts	*Heun*	*klassisches RK*
$\begin{array}{c\|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$	$\begin{array}{c\|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$

Daraus ergeben sich folgende Resultate

a) *Euler vorwärts:*

$$\begin{array}{rclcrcl} k_1 & = & f(x_i, y_i) & \Rightarrow & k_1 & = & f(a, y_a) = -0.5 \\ y_{i+1} & = & y_i + h \cdot k_1 & \Rightarrow & y_1 & = & y_a + h \cdot k_1 = 0.5 - 0.05 = 0.45 \end{array}$$

Der Fehler ist $|y_1 - y(1.1)| = 2.489 \cdot 10^{-3}$.

b) *Heun:*

$$\begin{array}{rcllcl} k_1 &=& f(x_i, y_i) & \Rightarrow\ k_1 &=& -0.5 \\ k_2 &=& f(x_{i+1}, y_i + h \cdot k_1) & \Rightarrow\ k_2 &=& -2 \cdot 1.1 \cdot 0.45^2 = -0.4455 \\ y_{i+1} &=& y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) & \Rightarrow\ y_1 &=& 0.452725 \end{array}$$

Der Fehler ist $|y_1 - y(1.1)| = 2.363 \cdot 10^{-4}$.

c) *Klassisches RK:*

$$\begin{array}{rcllcl} k_1 &=& f(x_i, y_i) & \Rightarrow\ k_1 &=& -0.5 \\ k_2 &=& f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1) & \Rightarrow\ k_2 &=& -0.4738125 \\ k_3 &=& f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2) & \Rightarrow\ k_3 &=& -0.476428303 \\ k_4 &=& f(x_i + h, y_i + h \cdot k_3) & \Rightarrow\ k_4 &=& -0.450179419 \\ y_{i+1} &=& y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & \Rightarrow\ y_1 &=& 0.45248898289 \end{array}$$

Der Fehler ist $|y_1 - y(1.1)| = 2.9511 \cdot 10^{-7}$.

G 15 (*Konsistenzordnung explizites Euler–Verfahren*)

Zeigen Sie, daß das explizite Euler–Verfahren konsistent von der Ordnung 1 ist.

Die Konsistenzordnung ist gegeben durch die Ordnung des lokalen Abschneidefehlers ρ. *Dieser ist definiert als*

$$\rho = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, y(t), h).$$

Äquivalent dazu ist

$$y(t+h) = y(t) + h\Phi(t, y(t), h) + h\rho. \tag{1}$$

Um die Konsistenzordnung zu zeigen muß man die **exakte** *Lösung* $y(t)$ *in die Verfahrensvorschrift einsetzen und den Fehler* $h\rho$ *bestimmen. Im Falle des Euler-Verfahrens ergibt sich*

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + h\rho.$$

Da $y(t+h)$ *Taylor-entwickelt werden kann um den Punkt* t *erhalten wir eine zweite Gleichung für* $y(t+h)$

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi), \quad \xi \in [t, t+h].$$

Da $y(t)$ *Lösung des AWP* $y'(t) = f(t, y(t))$ *ist, folgt*

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi). \tag{2}$$

Die Differenz (1) - (2) ergibt das Resultat

$$0 = h\rho - \frac{1}{2}h^2 y''(\xi) \quad \Rightarrow \quad \rho = \mathcal{O}(h).$$

Hausübung

H 13 (*Transformation auf das Standarddreieck, Formel von Collatz und Albrecht*)
Verwenden Sie die Formel von Collatz und Albrecht

$$\int_{T_0} f(x,y)\ dxdy \approx \frac{1}{60}\left[f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0) + f(0,\frac{1}{2})\right] + \frac{9}{60}\left[f(\frac{1}{6},\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{6},\frac{4}{6}) + f(\frac{4}{6},\frac{1}{6})\right]$$

um die Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$ auf dem Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(3,0)$ und $(4,4)$ zu integrieren.

Man bestimmt zuerst eine affine Transformation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Standarddreieck T_0 auf das gegebene Dreieck T abbbildet. Wir setzen dabei wie im Skript (Seite 110) $\Phi : T_0 \to T$ als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A_T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

an. Dann gilt

$$\int_T f(x,y)\ dxdy = \int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ \det(A_T)\ d\xi d\eta.$$

Man fordert

$$\Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und erhält daraus für x_1, y_1 und die Matrix A_T

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad A_T = \begin{pmatrix} 3-0 & 4-0 \\ 0-1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von A_T ist

$$\det(A_T) = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 13.$$

Damit erhält man

$$\int_T f(x,y)\ dxdy = \int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ \det(A_T)\ d\xi d\eta.$$

Jetzt kann die Formel von Collatz und Albrecht angewendet werden:

$$\begin{aligned} \int_T f(x,y)\ dxdy &= \int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ \det(A_T)\ d\xi d\eta = 13 \int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ d\xi d\eta \\ &\approx 13 \cdot \frac{1}{60}\left[f(\Phi(\frac{1}{2},\frac{1}{2})) + f(\Phi(\frac{1}{2},0)) + f(\Phi(0,\frac{1}{2}))\right] \\ &\quad +13 \cdot \frac{9}{60}\left[f(\Phi(\frac{1}{6},\frac{1}{6})) + f(\Phi(\frac{1}{6},\frac{4}{6})) + f(\Phi(\frac{4}{6},\frac{1}{6}))\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{13}{60}\left[f(\frac{7}{2},2)+f(\frac{3}{2},\frac{1}{2})+f(2,\frac{5}{2})\right] \\
&\quad +\frac{117}{60}\left[f(\frac{7}{6},\frac{4}{3})+f(\frac{19}{6},\frac{17}{6})+f(\frac{8}{3},\frac{5}{6})\right] \\
&= \frac{13}{60}\left[\frac{715}{8}+5+\frac{369}{8}\right]+\frac{117}{60}\left[\frac{1695}{216}+\frac{325}{3}+\frac{5901}{216}\right] \\
&= \frac{4564}{15}\approx 310.2667.
\end{aligned}
$$

H 14 (*Konsistenzordnung des impliziten Euler-Verfahrens*)

Zeigen Sie, daß das implizite Euler–Verfahren konsistent von der Ordnung 1 ist.

Hinweis: Verwenden Sie, daß η_1 durch die Gleichung $\eta_1 = y_0 + hf(t_1,\eta_1)$ wohldefiniert ist (für h hinreichend klein), oder verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

1. Lösungsweg:

Die Bestimmungsgleichung für η_1 lautet

$$\eta_1 = y_0 + hf(t_1,\eta_1)$$

und die Taylorentwicklung der exakten Lösung $y_1 = y(t_1)$ ergibt

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y_0'h + \frac{h^2}{2}y_0'' + \mathcal{O}(h^3) = \\
&= y_0 + f(t_0,y_0)h + \frac{h^2}{2}(f_t(t_0,y_0)+f_y(t_0,y_0)f(t_0,y_0)) + \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}
$$

Der lokale Abschneidefehler ist

$$
\begin{aligned}
\delta = \eta_1 - y_1 &= y_0 + hf(t_1,\eta_1) \\
&\quad - \left(y_0 + hf(t_0,y_0) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_0,y_0)+f_y(t_0,y_0)f(t_0,y_0)) + \mathcal{O}(h^3)\right).
\end{aligned}
$$

Zweidimensionale Taylorentwicklung von f ergibt

$$
\begin{aligned}
\delta &= h[f(t_0,y_0) + f_t(t_0,y_0)h + f_y(t_0,y_0)h(f(t_0,y_0)+\mathcal{O}(h)) + \mathcal{O}(h^2) \\
&\quad - f(t_0,y_0) - \frac{h}{2}(f_t(t_0,y_0)+f_y(t_0,y_0)f(t_0,y_0)) + \mathcal{O}(h^2)] \\
&= h\left(\frac{h}{2}f_t(t_0,y_0) + f_y(t_0,y_0)\frac{h}{2}f(t_0,y_0)) + \mathcal{O}(h^2)\right) \\
&= \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung $\tau = \mathcal{O}(h)$.

2. Lösungsweg:
Schreibe die Bestimmungsgleichung als implizite Gleichung:

$$0 = \eta_1 - \eta_0 - hf(t_0 + h, \eta_1) =: F(t_0, h, \eta_0, \eta_1)$$

Um den Satz über implizite Funktionen verwenden zu können, betrachte

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_1} = I - hf_y(t_0 + h, \eta_1).$$

Diese Matrix ist invertierbar, da

$$\|hf_y(t_0 + h, \eta_1)\| \leq \|hC_1\|$$

und damit, wenn die Schrittweite klein genug ist, diese Norm immer kleiner 1 ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen gibt es also eine Funktion g mit:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= g(t_0, h, \eta_0) = \\ &= \underbrace{g(t_0, 0, \eta_0)}_{=\eta_0} + \frac{\partial g}{\partial h}(t_0, 0, \eta_0)h + \frac{\partial^2 g}{\partial\, h^2}(t_0, 0, \eta_0)\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}\left(h^3\right)\end{aligned}$$

Um die Ableitung von g zu erhalten:

$$\begin{aligned}
F_h &= -f - hf_t & F_h(t_0, 0, \eta_0, \eta_0) &= -f(t_0, \eta_0) \\
F_{\eta_1} &= I - hf_y & F_{\eta_1}(t_0, 0, \eta_0, \eta_0) &= I \\
F_{hh} &= -2f_t - hf_{tt} & F_{hh}(t_0, 0, \eta_0, \eta_0) &= -2f_t(t_0, \eta_0) \\
F_{h\eta_1} &= -f_y - hf_{ty} & F_{h\eta_1}(t_0, 0, \eta_0, \eta_0) &= -f_y(t_0, \eta_0) \\
F_{\eta_1\eta_1} &= -hf_{yy} & F_{\eta_1\eta_1}(t_0, 0, \eta_0, \eta_0) &= 0
\end{aligned}$$

differenziere die implizite Gleichung nach h:

$$\begin{aligned}
0 &= F_h + F_{\eta_1} g_h \\
g_h(t_0, 0, \eta_0) &= f(t_0, \eta_0) \\
0 &= F_{hh} + 2F_{h\eta_1} g_h + F_{\eta_1\eta_1} g_h^2 + F_{\eta_1} g_{hh} \\
g_{hh} &= 2f_t(t_0, \eta_0) + 2f_y(t_0, \eta_0)f(t_0, \eta_0) \\
\eta_1 - y_1 &= \eta_0 + f(t_0, \eta_0)h + (f_t(t_0, \eta_0) + f_y(t_0, \eta_0)f(t_0, \eta_0))h^2 + \mathcal{O}(h^3) - \\
&\quad \left(y_0 + hf(t_0, y_0) + (f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0)f(t_0, y_0))\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)\right) = \\
&= \frac{h^2}{2}(f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0)f(t_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Damit ist der lokale Diskretisierungsfehler von der Ordnung 1.

H 15 (*MATLAB, OCTAVE oder NUMAWWW: Das Räuber-Beute Modell*)

Ein einfaches Modell zur Berechnung von Populationen ist das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x + \beta x y \\ y'(t) &= \gamma y + \delta x y \end{aligned}$$

Dabei stellt x bzw. y die jeweilige Anzahl an Kreaturen der einzelnen Arten dar. Programmiere das Standard-Runge-Kutta-Verfahren mit den Parametern

$$\alpha = \frac{1}{4}\,,\ \beta = -\frac{1}{100}\,,\ \gamma = -1\,,\ \delta = \frac{1}{100}\,,$$

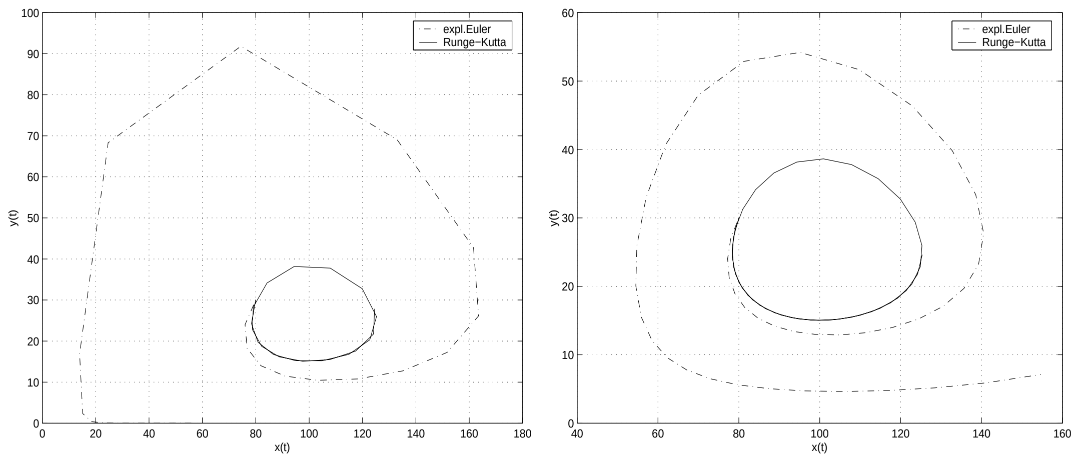
den Startwerten

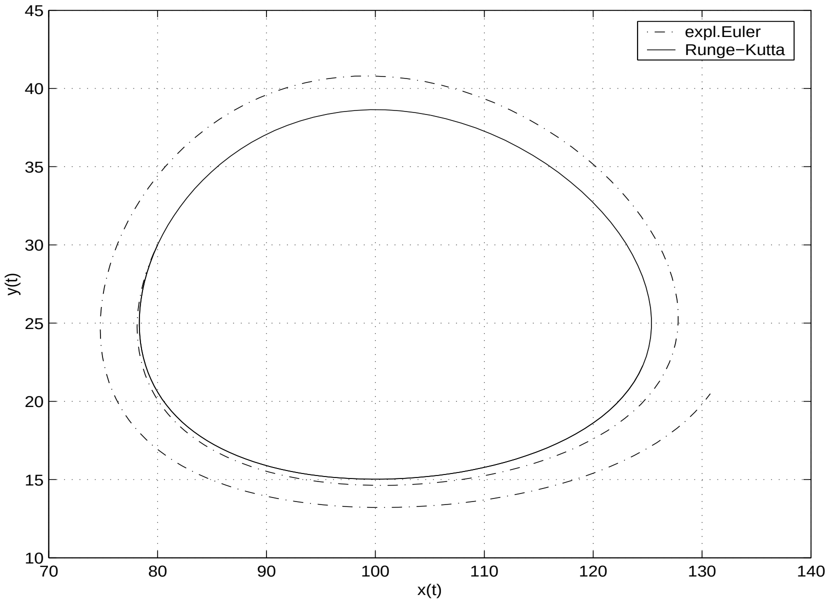
$$x_0 = 80\,, \quad y_0 = 30$$

und den Schrittweiten $h = 1,\ 0.5,\ 0,1$. Vergleiche die jeweiligen Ergebnisse mit dem expliziten Euler-Verfahren zur gleichen Schrittweite. Plotte dazu jeweils die Koordinaten (x_j, y_j). Die Rechnungen sollen jeweils auf dem Zeitintervall $[0, 20]$ ausgeführt werden.

Hinweis zur Kontrolle: In MATLAB können Sie Ihre Ergebnisse auch mit dem standardmßig implementierten Standard-Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 vergleichen (*ode45*).

Im Folgenden sind die Lösungen für die drei verschiedenen Schrittweiten angegeben. Auffällig sollte sein, dass das Euler-Verfahren es nie schaffen wird, die geschlossene Ellipse nachzubilden, die beim RK-Verfahren entsteht. Diese Lösung zeigt den wahren Kreislauf viel Beute→viele Jäger→wenig Beute→wenige Jäger→viel Beute....






```
function programm10(h)
% Benutzt die Schrittweite h fuer das explizite Eulerverfahren
% und das Standard-Runge-Kutta-Verfahren

n = floor(20/h+1);
alpha = .25; beta = -.01; gamma = -1.; delta = .01;
x(1) = 80.; y(1) = 30.;
xx(1) = 80.; yy(1) = 30.;
for i=2:n+1
  x(i) = x(i-1) + h * (alpha * x(i-1) + beta * x(i-1) * y(i-1));
  y(i) = y(i-1) + h * (gamma * y(i-1) + delta * x(i-1) * y(i-1));

  k1x = alpha * xx(i-1) + beta * xx(i-1) * yy(i-1);
  k1y = gamma * yy(i-1) + delta * xx(i-1) * yy(i-1);
  qx = xx(i-1) + .5 * h * k1x;
  qy = yy(i-1) + .5 * h * k1y;
  k2x = alpha * qx + beta * qx * qy;
  k2y = gamma * qy + delta * qx * qy;
  qx = xx(i-1) + .5 * h * k2x;
  qy = yy(i-1) + .5 * h * k2y;
  k3x = alpha * qx + beta * qx * qy;
  k3y = gamma * qy + delta * qx * qy;
  qx = xx(i-1) + h * k3x;
  qy = yy(i-1) + h * k3y;
  k4x = alpha * qx + beta * qx * qy;
  k4y = gamma * qy + delta * qx * qy;
  xx(i) = xx(i-1) + h * (k1x + 2 * k2x + 2 * k3x + k4x) / 6;
```

```
  yy(i) = yy(i-1) + h * (k1y + 2 * k2y + 2 * k3y + k4y) / 6;
end;

figure(1);clf; plot(x,y,'-.'); hold; grid; plot(xx,yy);
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)'); legend('expl.Euler','Runge-Kutta',0);
```