Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 4, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 10 (*Gauss-Quadratur*)

Die mittlere Temperatur der Sonneneinstrahlung am 21. Juni sei definiert durch:

$$\tau_m = \frac{1}{\mathrm{SU} - \mathrm{SA}} \int_{\mathrm{SA}}^{\mathrm{SU}} \tau(t)\, dt$$

$\tau(t)$	Temperatur zur Zeit t
SA$= 5^{00}$	Sonnenaufgang
SU$= 22^{00}$	Sonnenuntergang

τ_m soll aus nur drei Tagestemperaturen ermittelt werden. Wann sind die Temperaturen zu messen, um ein möglichst optimales Ergebnis zu erhalten?

Hinweis: Die Wahl der Meßzeitpunkte gemäß Gauß-Quadratur mit Legendre-Polynomen (siehe Tabelle Vorlesung) liefert maximale Approximationsordnung.

$$\tau_m = \frac{1}{22 - 5} \int_{5}^{22} \tau(t)\, dt$$

Wahlfreiheit in den Knoten $\Longrightarrow$ *Gauß-Quadratur:*
Stützstellenwahl so, dass $\tau(t)$ *durch ein Polynom möglichst hoher Ordnung approximiert wird. Rückführung auf das Intervall [-1,1] durch Transformation*

$$x = \frac{2t - 27}{17}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{17}$$

$$\Longrightarrow \tau_m = \frac{1}{17} \int_{-1}^{1} \frac{17}{2} \tau(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \tau(x)\, dx$$

Aus der Tabelle für die Stützstellen der Gauß–Quadratur ergeben sich als Nullstellen des Legendre-Polynoms mit $n = 3$

$$x_0 = -0.774596669241483, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.774596669241483$$

Die Umrechnung auf die Tageszeit liefert mit $t = \frac{27}{2} + \frac{17}{2}x$*:*

$$t_0 \approx 6.916, \quad t_1 = 13.5, \quad t_2 \approx 20.084,$$

d.h. die Temperatur muss zu den Zeiten 6:55 Uhr, 13:30 Uhr und 20:05 Uhr gemessen werden.

G 11 (*Summierte Trapezregel.*)

Das Integral

$$A = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx$$

soll mit der summierten Trapezregel berechnet werden. Der dabei auftretende Fehler soll kleiner als 0,0001 sein. Wie klein muss dazu die Schrittweite h gewählt werden? Wieviele Funktionsauswertungen sind dazu nötig? Wieviele sind nötig, wenn die Symmetrie des Integranden berücksichtigt wird?

Der Fehler in der summierten Trapezregel läßt sich durch den folgenden Ausdruck abschätzen:

$$E \le \frac{M}{12}(b-a)h^2, \qquad M = \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.$$

Für den Integranden gilt

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f'(x) = -2xe^{-x^2}$$
$$f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2} \qquad f'''(x) = 4x(3-2x^2)e^{-x^2}$$

Die absoluten Extrema der zweiten Ableitung auf dem Intervall $[-1,1]$ *liegen entweder am Rand oder an den Nullstellen der dritten Ableitung*

$$f'''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \;\vee\; x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin [-1,1].$$

Damit gilt nun

$$M = \max\{|f''(-1)|,\, |f''(0)|,\, |f''(1)|\} = \max\{2e^{-1}, 2, 2e^{-1}\} = 2.$$

und weiter

$$E \le \frac{1}{3}h^2 \overset{!}{\le} 0,0001.$$

Auflösen nach h ergibt

$$h \le \frac{1}{100}\sqrt{3} \quad \text{d.h.} \quad n \ge \frac{2}{h} = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 115.4701.$$

Damit sind bei voller Betrachtung des Integrationsbereiches mindestens 117 Auswertungen der Funktion notwendig, bei Beachtung der Symmetrie sinkt diese Zahl auf 59 Auswertungen.

G 12 (*Adaptive Quadratur mit Simpson–Regel*)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+256x^2}$. Es soll mittels adaptiver Quadratur und unter Verwendung der Simpsonformel das Integral über $f(x)$ in den Grenzen von 0 bis 1 bestimmt werden. Als Vorschlagsschrittweite für den ersten Schritt sei $H_0 = \frac{1}{4}$ gegeben. Untersuchen Sie ob diese Schrittweite akzeptabel ist, wenn eine Fehlertoleranz von $\epsilon = 10^{-3}$ gefordert wird.

Hinweis: Gehen Sie analog zu der Darstellung im Skript vor.

Zunächst müssen im Interval $[0, \frac{1}{4}]$ *mit der Simpsonregel und der summierten Simpsonregel mit zwei Teilintervallen zwei Integralnäherungen bestimmt werden. Die benötigten Funktionswerte sind*

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{17}$

Die Integralnäherungen sind

- *einfache Simpsonregel:*

$$F_1 = \frac{1}{24}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{4})\right) = \frac{79}{1020} \approx 0.0774510$$

- *summierte Simpsonregel:*

$$F_2 = \frac{1}{48}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{16}) + 2f(\frac{1}{8}) + 4f(\frac{3}{16}) + f(\frac{1}{4})\right) = \frac{41}{510} \approx 0.0803922$$

Mit diesen Werten läßt sich nun κ *berechnen:*

$$\kappa = \left(\frac{10^{-3} \cdot 15}{16 \cdot 4|F_2 - F_1|}\right)^{\frac{1}{4}} \approx \left(7.969 \cdot 10^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0.531 < 1\ .$$

Die Schrittweite ist also nicht akzeptabel.

Hausübung

H 10 (*Summierte Trapezregel*)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin(10\pi x)} dx \approx 1.154700538$$

numerisch mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und summierten Simpsonregel $S(h)$. Verwenden Sie in beiden Fällen $h = 0.125$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Tabelle der Funktionswerte:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	1.000	0.375	1.5469181	0.75	2.0000000
0.125	1.5469183	0.5	1.0000003	0.875	0.7387964
0.25	0.6666667	0.625	0.7387961	1.0	0.9999993

Es folgt

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{h}{2}\left(f(0) + 2\sum_{i=1}^{7} f(ih) + f(1)\right) = 1.1547620 \\ S(h) &= \frac{h}{3}\left((f(0) + 2\sum_{i=1}^{3} f(2ih) + 4\sum_{i=1}^{4} f((2i-1)h) + f(1)\right) = 1.1507936 \end{aligned}$$

Bei dieser Konstellation ist die Trapezsumme besser als die summierte Simpsonregel.

H 11 (*Gauss-Quadratur und Fehler*)

Berechnen Sie mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur-Formel näherungsweise das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t} dt,$$

und schätzen Sie den Quadraturfehler ab.

Hinweis: $\left|\frac{d^6}{dt^6}\frac{e^t}{t}\right| \leq 190$ für $t \in [2,3]$.

Die Gauß-Quadraturformel lautet in der allgemeinen Form

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} w_k^{(n)} f(\bar{x}_k^{(n)}) \quad \text{mit} \quad \bar{x}_k^{(n)} = \frac{b-a}{2}x_k^{(n)} + \frac{b+a}{2}.$$

In folgender Tabelle sind die Nullstellen des Legendre-Polynoms $x_k^{(2)}$, die transformierten Stützstellen $\bar{x}_k^{(2)} = \frac{1}{2}x_k^{(2)} + \frac{5}{2}$, die Gewichte $w_k^{(2)}$, die Punktauswertungen von f und die Produkte $w_k^{(2)} f(\bar{x}_k^{(2)})$ angegeben.

k	$x_k^{(2)}$	$\bar{x}_k^{(2)}$	$w_k^{(2)}$	$f(\bar{x}_k^{(2)})$	$w_k^{(2)} f(\bar{x}_k^{(2)})$
0	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	2.112702	0.5555556	3.914682	2.174823
1	0	2.5	0.8888889	4.872998	4.331553
2	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	2.887298	0.5555556	6.215071	3.452817
				$\frac{1}{2}\Sigma =$	4.979597

Die exakte Darstellung des Integrals ist

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t} dt = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2} w_k^{(n)} f(\bar{x}_k^{(n)}) + R_3(f, w, \bar{x}; 1)$$

mit

$$R_3(f, w, \bar{x}; 1) = \frac{1}{6!} \left(\frac{d^6}{dt^6} \frac{e^t}{t} \right)_{t=\xi} \int_2^3 (x - \bar{x}_0)^2 (x - \bar{x}_1)^2 (x - \bar{x}_2)^2 \, dx$$

Das Integral lässt sich mit $y := x - \frac{5}{2}$ folgendermaßen auswerten:

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-1/2}^{1/2} \left(y^2 - \frac{3}{20} \right)^2 y^2 \, dy = \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 - \frac{3}{25} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{3}{200} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{25} \right) \approx 3.57 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Mit dem Hinweis ergibt sich dann eine Fehlerabschätzung von

$$\left| \int_2^3 \frac{e^t}{t} dt - 4.979597 \right| \leq \frac{190}{6!} I = 9.42 \cdot 10^{-5}.$$

H 12 (Adaptive Simpson-Quadratur)

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + x^{64}}$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{(x-3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-9)^2 + 0.04} - 6$$

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \pi, \\ 1, & x \geq \pi. \end{cases},$$

gesucht sind Approximationen von

$$\int_{-10}^{10} f(x) dx, \quad \int_{-2}^{2} g(x) dx, \quad \int_{-4}^{4} u(x) dx \text{ und } \int_{1}^{5} v(x) dx.$$

Implementieren Sie dazu eine MATLAB Routine, die mit der in der Vorlesung behandelten Schrittweitenkorrektor arbeitet. Die Routine soll das Simpson Verfahren verwenden. Visualisieren Sie den Verlauf der Schrittweiten.

Hinweis: $u(x)$ entspricht der MATLAB Funktion `humps`.

Eine mögliche Herangehensweise sieht so aus:

```
function []=prakt3()

close all
hnull=5;
TOL=10e-5;
a=-10;
b=10;

[intkumm,xp]=adaptsimpson(@testf1,a,b,TOL,hnull);

subplot(2,2,1)
fplot(@testf1,[a b])
xlabel('f(x)=exp(-x^2/2)(2\pi)^{-1/2}')
hold on
n=size(xp,2);
for i=1:n
    line([xp(i) xp(i)],[-.1 -.08])
end % for i

axis([a b -.1 .5])

hnull=5;
TOL=10e-5;
a=-2;
b=2;

[intkumm,xp]=adaptsimpson(@testf2,a,b,TOL,hnull);

subplot(2,2,2)
fplot(@testf2,[a b])
xlabel('g(x)=1/(1+x^{64})')
hold on
n=size(xp,2);
for i=1:n
    line([xp(i) xp(i)],[-.1 -.06])
end % for i

axis([a b -.1 1.1])

hnull=5;
TOL=10e-5;
a=-4;
```

```
b=4;

[intkumm,xp]=adaptsimpson(@humps,a,b,TOL,hnull);

subplot(2,2,3)
fplot(@humps,[a b])
xlabel('u(x)=humps(x)')
hold on
n=size(xp,2);
for i=1:n
    line([xp(i) xp(i)],[-20 -16])
end % for i

axis([a b -20 100])

hnull=5;
TOL=10e-5;
a=.5;
b=5;

[intkumm,xp]=adaptsimpson(@testf3,a,b,TOL,hnull);

subplot(2,2,4)
fplot(@testf3,[a b])
xlabel('v(x)=exp(x)/x^2')
hold on
n=size(xp,2);
for i=1:n
    line([xp(i) xp(i)],[1 1.2666])
end % for i

axis([a b 1 7])



function [intkumm,xp]=adaptsimpson(fcn,a,b,TOL,hnull)

xnull=a;
h=hnull;
intende=xnull+h;
intanfang=xnull;

i1=intanfang+h/4;
```

```
i2=intanfang+h/2;
i3=intanfang+3*h/4;

intkumm=0;
weiter=1;
i=1;
xp(1)=a;
yp(1)=0;

while(weiter==1)

    simpson1=h/6*(feval(fcn,intanfang)+4*feval(fcn,i2)+feval(fcn,intende));
    simpson2=h/12*(feval(fcn,intanfang)+4*feval(fcn,i1)+feval(fcn,i2));
    simpson2=simpson2+h/12*(feval(fcn,i2)+4*feval(fcn,i3)+feval(fcn,intende));

    if(simpson1==simpson2)
        kappa=2;
    else
        kappa=((TOL*15*h)/((b-a)*16*abs(simpson1-simpson2)))^(1/4);
    end % if

    if(kappa>=1) || (h < sqrt(eps))
        i=i+1;
        if(intende>b)
            intende=b;
            h=intende-intanfang;
            i1=intanfang+h/4;
            i2=intanfang+h/2;
            i3=intanfang+3*h/4;
            simpson2=h/12*(feval(fcn,intanfang)+4*feval(fcn,i1)+feval(fcn,i2));

 simpson2=simpson2+h/12*(feval(fcn,i2)+4*feval(fcn,i3)+feval(fcn,intende));
            intkumm=intkumm+simpson2;
            weiter=0;
            xp(i)=intende;
            yp(i)=0;
        else
            xp(i)=intende;
            yp(i)=0;
            intkumm=intkumm+simpson2;
  if h >= sqrt(eps)
     h=h*max([1,min([.9*kappa,2])]);
  else
```

```
h = sqrt(eps);
            end
            intanfang=intende;
            intende=intanfang+h;
        end
    else
        h=h*.9*kappa;
        intende=intanfang+h;
    end % if

    i1=intanfang+h/4;
    i2=intanfang+h/2;
    i3=intanfang+3*h/4;

end % while



function [y]=testf1(x)

y=1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2);



function [y]=testf2(x)

y=1/(1+x^64);



function [y]=testf3(x)

if x < pi
y = 0;
else
y = 1;
end
```

Mit einer vorgegebenen Genauigkeit $TOL = 10^{-5}$ *erhalten wir:*

$$\int_{-10}^{10} f(x)dx = 1.0000007, \quad \int_{-2}^{2} g(x)dx = 2.0008033$$

$$\int_{-4}^{4} u(x)dx = -1.9049312 \text{ und } \int_{1}^{5} v(x)dx = 1.8584073.$$

Den Schrittweitenverlauf entnimmt man untenstehender Skizze.