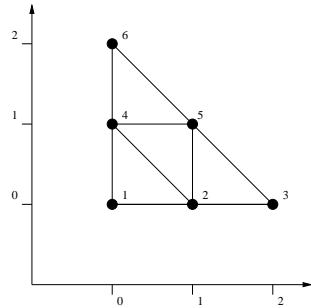


Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 3, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 7 (Linear Interpolation in 2D)

Wie lautet die Basisfunktion φ der stückweise linearen stetigen Interpolation zum Knoten Nr. 4 der unten angegebenen Triangulation ?



$$\varphi(P_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die gesuchte Basisfunktion muß in den Knoten 1,3,4,5,6 verschwinden und im Knoten 4 den Wert 1 annehmen. Daraus ergeben sich mit dem linearen Ansatz

$$\varphi(x) = a + bx + cy$$

folgende Bestimmungsgleichungen

- Dreieck 124 :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(P_1) &= a + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \\ \varphi(P_2) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \\ \varphi(P_4) &= a + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b = 0, \quad c = 1$$

- Dreieck 235 :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(P_2) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \\ \varphi(P_3) &= a + b \cdot 2 + c \cdot 0 = 0 \\ \varphi(P_5) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b = c = 0$$

- Dreieck 245 :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(P_2) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \\ \varphi(P_4) &= a + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 1 \\ \varphi(P_5) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0$$

- Dreieck 456 :

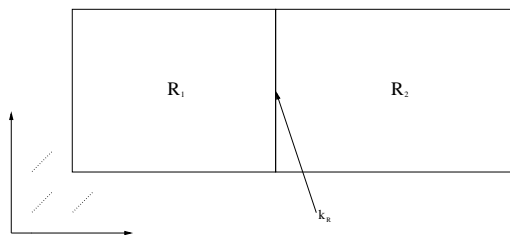
$$\left. \begin{aligned} \varphi(P_4) &= a + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 1 \\ \varphi(P_5) &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 \\ \varphi(P_6) &= a + b \cdot 0 + c \cdot 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2, \quad b = c = -1$$

Die Basisfunktion lautet demnach

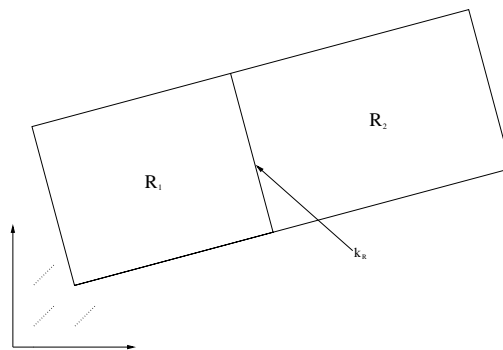
$$\varphi_5(x) = \begin{cases} y & \text{in Dreieck 124} \\ 0 & \text{in Dreieck 235} \\ 1 - x & \text{in Dreieck 245} \\ 2 - x - y & \text{in Dreieck 456} \end{cases}$$

G 8 (Bilineare Interpolation)

Gegeben seien zwei achsenparallele Rechtecke R_1 und R_2 , die genau eine Kante k_R gemeinsam haben. Weiterhin seien auf R_1 bzw. R_2 bilineare Polynome p_1 bzw. p_2 gegeben, die auf den Rechtecksecken gegebene Werte interpolieren.



- Zeigen Sie, daß p_1 und p_2 in k_R stetig ineinander übergehen.
- Gehen p_1 und p_2 in k_R notwendigerweise differenzierbar ineinander über?
- Betrachten Sie nun beliebige Rechtecke R_1 und R_2 , die genau eine Kante k_R gemeinsam haben. Ist der Übergang nun immer noch stetig?



- Wir haben

$$p_1(x, y) = a_1 + b_1x + c_1y + d_1xy$$

bzw.

$$p_2(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y + d_2xy.$$

Man orientiere sich an der Skizze. Dies kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit tun. Lügen R_1 und R_2 "übereinander", könnte man den Beweis analog führen.

Auf k_R ist nun $x \equiv x_0$. Also gilt dort

$$p_1(x_0, y) = (a_1 + b_1x_0) + (c_1 + d_1x_0)y$$

bzw.

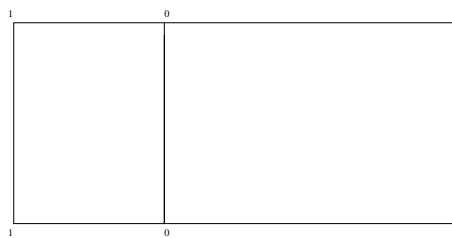
$$p_2(x_0, y) = (a_2 + b_2x_0) + (c_2 + d_2x_0)y,$$

was heißt, daß die beiden Polynome auf k_R beschränkt Geraden sind. In den Rechtecksecken haben die Geraden jeweils gleiche Funktionswerte. Also sind sie gleich. Damit gilt

$$p_1(x_0, y) = p_2(x_0, y),$$

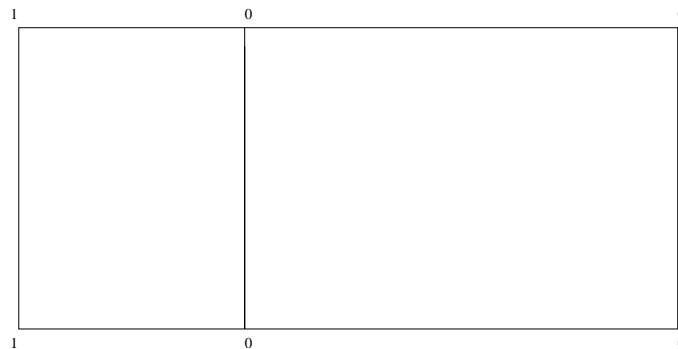
was zu zeigen war.

- b) Man betrachtet ein einfaches Gegenbeispiel. Man habe zwei Rechtecke mit Funktionswerten wie in der Skizze angegeben:



Im rechten Rechteck ist das interpolierende bilineare Polynom konstant null, während im linken Rechteck ein affin lineares Polynom interpoliert. Wir haben also einen Knick in der Übergangsseite. Im Allgemeinen gehen die bilinearen Interpolationspolynome also nicht differenzierbar ineinander über.

- c) Auch hier betrachten wir ein Beispiel:



Auf der Übergangsseite gilt $y = -x$. Wir erhalten damit

$$p_i(x, -x) = a_i + (b_i - c_i)x - d_i x^2 \text{ für } i = 1, 2$$

auf dem Übergang. Im Gegensatz zu Teil a) sind also p_1 und p_2 auf k_R nicht notwendigerweise linear. Parabeln aber werden durch zwei Wertevorgaben im Allgemeinen nicht eindeutig festgelegt, also ist die Gleichheit von p_1 und p_2 nicht automatisch gegeben. Also ist der Übergang nicht immer stetig.

Berechnen Sie Näherungen für die beiden folgenden bestimmten Integrale mit der Trapez- bzw. der Simpsonregel und vergleichen Sie mit den exakten Werten:

$$\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx, \quad \int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4} \, dx.$$

a) Die Trapezregel liefert

$$T = \frac{2-0}{2}(0 + e^4 \sin 6) \approx -15,26 \dots$$

während man mit der Simpsonregel

$$S = \frac{2-0}{6}(0 + 4e^2 \sin 3 + e^4 \sin 6) \approx -3,69 \dots$$

erhält. In diesem speziellen Fall liefert die Trapezregel eine bessere Näherung. Der exakte Wert ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x \right]_0^2 - \frac{3}{2} \int_0^2 e^{2x} \cos 3x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x \right]_0^2 - \frac{9}{4} \int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx \end{aligned}$$

also

$$\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx = \left[\frac{2}{13} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{13} e^{2x} \cos 3x \right]_0^2 \approx -14,21 \dots$$

b) Trapezregel:

$$T = \frac{2-0}{2} \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{8} \right) = \frac{3}{4} = 0,75$$

Simpsonregel:

$$S = \frac{2-0}{6} \left(\frac{2}{4} + 4 \frac{2}{5} + \frac{2}{8} \right) = \frac{47}{60} \approx 0,78\bar{3}.$$

Der exakte Wert ist

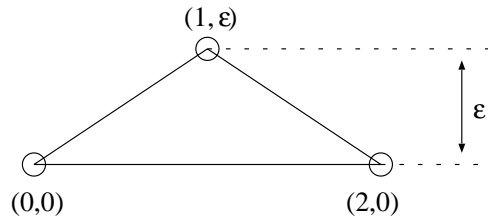
$$\int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4} \, dx = \left[\arctan \frac{x}{2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854 \dots,$$

so dass die Simpsonregel hier genauer ist.

Hausübung

H 7 (Lineare Interpolation in 2D)

Gegeben sei eine Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ und das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$.



- a) Interpolieren Sie die Funktion f durch eine (affin) lineare Funktion $l_\varepsilon(x, y) = ax + by + c$, wobei die Stützstellen gleich den Ecken des Dreiecks sind.
- b) Berechnen Sie den Fehler $\|\nabla f(1, 0) - \nabla l_\varepsilon(1, 0)\|$. Wie verhält sich der Fehler für $\varepsilon \rightarrow 0$? Vergleichen Sie dies mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.4.2.

a) Der Interpoland ist von der Form

$$l_\varepsilon(x, y) = a + bx + cy.$$

Die Interpolationsbedingungen liefern das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= f(0, 0) = l_\varepsilon(0, 0) = a && \rightarrow a = 0 \\ 4 &= f(2, 0) = l_\varepsilon(2, 0) = a + 2b && \rightarrow b = 2 \\ 1 + \varepsilon^2 &= f(1, \varepsilon) = l_\varepsilon(1, \varepsilon) = a + b + c\varepsilon && \rightarrow c = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$l_\varepsilon(x, y) = 2x + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}y.$$

b) Es ist

$$\nabla f(x, y) - \nabla l_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\|\nabla f(1, 0) - \nabla l_\varepsilon(1, 0)\| = \left| \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \right| \rightarrow \infty \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

H 8 (Transformation des Integrationsbereichs)

Gegeben sei die Quadratur-Formel

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{8} \left(f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) \right).$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Quadratur-Formel eine Näherung für das Integral

$$\int_3^4 \frac{1}{x} dx.$$

Mit Hilfe der Substitution $y = 2x - 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$ transformieren wir das Integral

$$\int_3^4 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}} dy.$$

Damit erhält man die Näherung

$$\int_3^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{2} \frac{2}{8} \left(\frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}} + 3 \frac{1}{-\frac{1}{6} + \frac{7}{2}} + 3 \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{7}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{10} + \frac{9}{11} + \frac{1}{4} \right) \approx 0.2876893$$

H 9 (Numerische Quadratur)

Schreiben Sie zwei Funktionen für die numerische Quadratur, die die zusammengesetzte Trapezregel bzw. die zusammengesetzte Simpson-Regel implementieren. Als Eingabe sollen die Intervallgrenzen a und b und die Anzahl n der äquidistanten Knoten übergeben werden.

Testen Sie die Programme an den bestimmten Integralen

$$\int_0^\pi \sin x \, dx, \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{10^{-2} + x^2} \, dx.$$

Lassen Sie n variieren und zeichnen Sie Diagramme für den Fehler der beiden Verfahren. Wie groß müsste n in den beiden Fällen jeweils sein, um einen vorgegebenen absoluten Fehler von maximal $\epsilon = 10^{-6}$ bei der Trapez- bzw. Simpson-Regel zu gewährleisten? Wie oft muss dabei der Integrand ausgewertet werden?

Wenden Sie die Trapezregel auch auf das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin(25x)^2 \, dx$$

an. Was beobachten Sie?

$$\begin{aligned} \text{Fehler bei der summierten Trapezregel:} & \quad \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \\ \text{Fehler bei der summierten Simpson-Regel:} & \quad \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

Man erhält bei einer Fehlertoleranz von $\epsilon = 10^{-6}$ im Fall der Trapezregel die Bedingung

$$h \leq \sqrt{\frac{12\epsilon}{(b-a) \|f\|_\infty}} \quad \text{oder} \quad n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \|f\|_\infty}{12\epsilon}}.$$

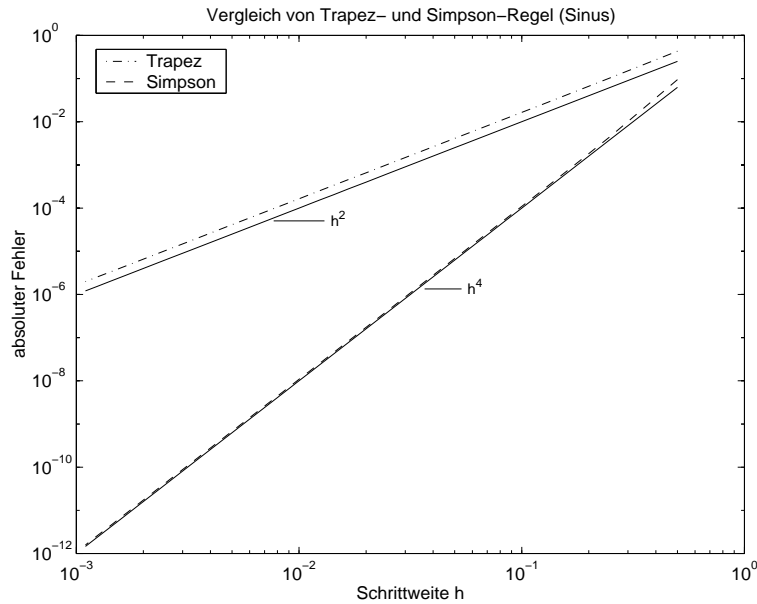
Bei der Simpson-Regel ergibt sich analog

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{180\epsilon}{(b-a) \|f\|_\infty}} \quad \text{oder} \quad n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 \|f\|_\infty}{180\epsilon}}.$$

Die Anzahl der Auswertungen des Integranden ist jeweils gleich der Anzahl der Knoten d.h. gleich $n + 1$.

a) Für die Sinus-Funktion ergeben sich die folgenden Schranken für n :

Trapezregel	1608
Simpson-Regel	36



b) Im zweiten Fall sind die Schranken wie folgt gegeben:

Trapezregel	115.470
Simpson-Regel	1437

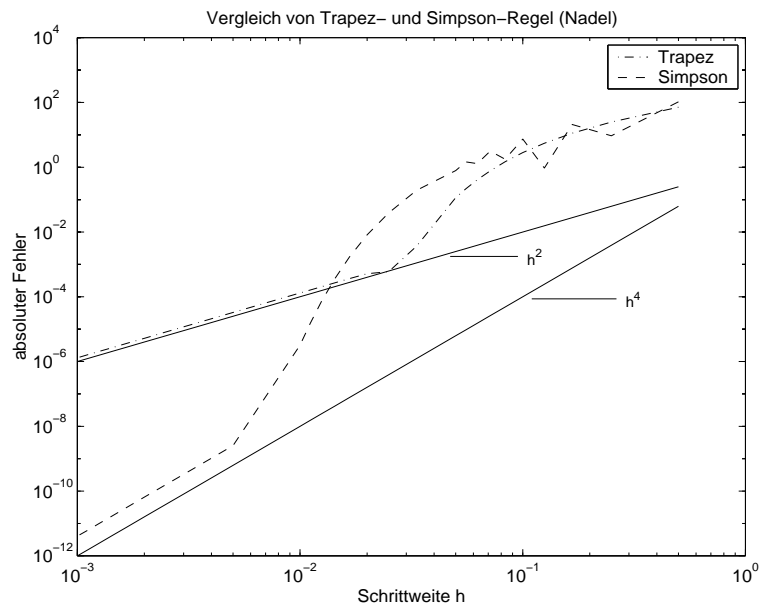
Die Ableitungen sind nämlich

$$f'(x) = \frac{-2x}{(10^{-2} + x^2)^2}, \quad f''(x) = -2 \cdot \frac{10^{-2} - 3x^2}{(10^{-2} + x^2)^3},$$

$$f^{(3)}(x) = 24x \cdot \frac{10^{-2} - x^2}{(10^{-2} + x^2)^4}, \quad f^{(4)}(x) = 24 \cdot \frac{10^{-4} - 10^{-3}x^2 + 5x^4}{(10^{-2} + x^2)^5},$$

so dass sich die folgenden Maximalwerte ergeben:

$$\|f''\|_{\infty} = f''(0) = 2 \cdot 10^4, \quad \|f^{(4)}\|_{\infty} = f^{(4)}(0) = 24 \cdot 10^6.$$



Bei dem dritten Integral liefert die Trapezregel ab $n = 7$ stets den exakten Wert $\pi = 3.1415\dots$ des Integrals. (Die Erklärung für dieses Phänomen liefert die spezielle Form der McLaurin'schen Summenformel, die man bei diesem Integranden erhält.)

n	Q_n
2	3.0307e-30
3	2.2730e-30
4	3.1416
5	3.1416
6	1.8620e-28
7	3.1416
8	3.1416
9	3.1416
10	3.1416
11	3.1416
12	3.1416
\vdots	\vdots