



Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 14

Gruppenübung

G 41 (*Ritz-Verfahren*)

Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Ritz und der Ansatzfunktion

$$\varphi(x, y) = x(1-x)y(1-y)$$

eine Näherungslösung für folgendes Randwertproblem über $G = [0, 1] \times [0, 1]$:

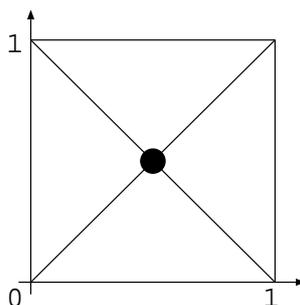
$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= 4 & (x, y) \in G \\ u(x, y) &= 0 & (x, y) \in \partial G \end{aligned}$$

G 42 (*Finite Elemente*)

Man löse näherungsweise die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 & \text{in } G = (0, 1) \times (0, 1), \\ u &= 0 & \text{auf } \partial G. \end{aligned}$$

unter Verwendung der einfachsten Methode der finiten Elemente mit nur einem inneren Knoten $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$ und der folgenden Triangulierung:



G 43 (*Lineare Randwertaufgabe*)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-u''(x) = 1, \quad x \in [a, b], \quad u(a) = u(b) = 0.$$

a) Wie lautet die exakte Lösung?

- b) Welches Gleichungssystem ergibt sich bei einer Diskretisierung mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{N+1}$, wenn man mit dem symmetrischen Differenzenquotienten zweiter Ordnung diskretisiert und die Randbedingungen ausnutzt?
- c) Warum liefert das Verfahren in b) exakte Werte an den Knoten x_i ?
- d) Zeigen Sie, daß für die Konditionszahl der Matrix $A = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$ folgende Abschätzung gilt:

$$\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{1}{2} ((N+1)^2 - 1).$$

Interpretieren Sie dies!

Hinweis: Zur Abschätzung der Norm von A^{-1} können Sie die Definition der zugeordneten Matrixnorm benutzen. Nutzen Sie auch die Tatsache aus, dass bei diesem Beispiel das Verfahren die exakte Lösung liefert.