Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30. Januar 2007

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 13

Gruppenübung

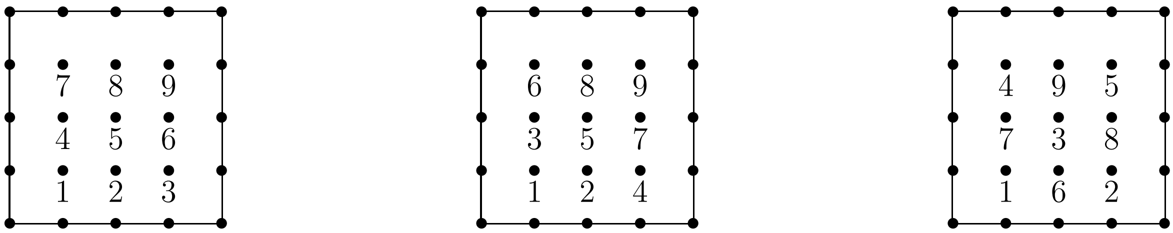
G 38 (*Diskretisierung der Poisson-Gleichung*)

Die POISSON-Gleichung auf dem Gebiet $G = [0,1] \times [0,1]$,

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y), \qquad (x,y) \in G, \\ u(x,y) &= 0, \qquad\qquad (x,y) \in \partial G, \end{aligned}$$

soll mit dem 5-Punkte-Stern und $h = 1/4$ diskretisiert werden.

a) Wie lautet das Gleichungssystem $Au^h = b$ für folgende Numerierungen:



α) zeilenweise $\quad$ β) diagonal $\quad$ γ) Schachbrett

b) Prüfen Sie für alle drei Fälle folgende Eigenschaften der Matrix A: symmetrisch, L-Matrix, irreduzibel diagonaldominant und positiv definit.

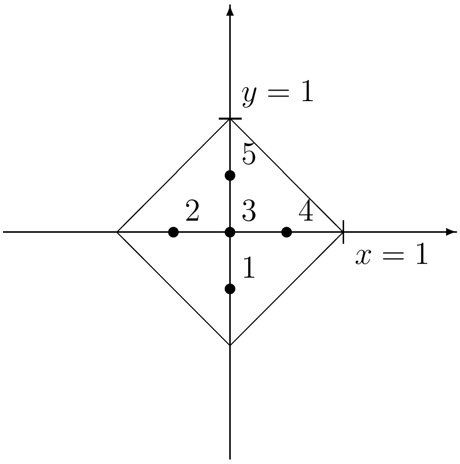
Zusatz: Welche Numerierung ist die günstigere, damit in der Dreieckszerlegung $A = LR$ die Matrizen L und R möglichst dünn besetzt sind. (Keine Gauß-Zerlegung berechnen!)

G 39 (*Differenzenverfahren für selbstadjungierte elliptische DGL*)

Diskretisieren Sie die selbstadjungierte DGL

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2+y^2)u_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^2)u_y\right) &= 4 \qquad \text{auf } G \\ u &= \ln(1+x^2+y^2) \qquad \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

mit $h = \frac{1}{2}$ und $G = \{x : \|x\|_1 \leq 1\}$:



Bestimmen Sie Näherungswerte für u in den Knoten $1, \ldots, 5$.

Hinweis: Verwenden Sie die Symmetrie des Problems

G 40 (*Klassifizierung von partiellen DGLen*)

Gegeben sei die dreidimensionale partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2xu_{xy} + 2yu_{yz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z).$$

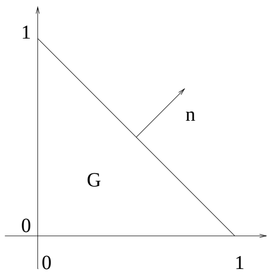
Man bestimme die Bereiche, in denen die Differentialgleichung elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist.

Hinweis: Gehen Sie analog zum 2D-Fall vor, indem Sie die Matrix der Koeffizienten vor den zweiten Ableitungen bestimmen und deren Eigenwerte untersuchen.

Hausübung

H 37 (*Diskretisierung von Randableitungen bei elliptischem RWP*)

Lösen Sie das Randwertproblem



$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & (x,y) &\in G, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1-x) &= 0, & x &\in [0,1], \\ u(x,0) &= 1-x^2, & x &\in [0,1], \\ u(0,y) &= 1-y^2, & y &\in [0,1] \end{aligned}$$

mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ und einer Diskretisierung der Randableitung von 2. Ordnung.

H 38 (*NumaWWW: Konvergenzrate Differenzenverfahren für Poisson-Gleichung*)
Auf dem NumaWWW-Server

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`

kann unter den Menüpunkten `partielle DGL's, Lösung der Helmholtz-Gleichung` das Standard-Differenzenverfahren zur Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = f(x,y)$$

auf einem rechteckigen Gebiet $G := [a,b] \times [c,d]$ mit gegebenen Daten f und $\lambda \leq 0$ getestet werden. Testen Sie zuerst das Verfahren mit den Voreinstellungen (u aus C^4 und u aus C^3) und approximieren Sie die Lösung mit $n = m = 10, 20, 40, 80$. Tragen Sie den ausgegebenen Fehler und die Schrittweite h $(= \frac{1}{N} = \frac{1}{M})$ in ein doppelt-logarithmisches Diagramm ein und überprüfen Sie, ob der Fehler des Verfahrens wie h^2 abnimmt.

Abgabetermin:	Dienstag, 30. Januar 2007
Programmieraufgabe:	bis zum 6. Februar 2007.