Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23. Januar 2007

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 12

Gruppenübung

G 35 (*Von Mises, Rayleigh-Quotient*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des von Mises-Verfahrens für die Matrix A erfüllt sind, und dass $x_0 = e_3 = (0, 0, 1)^T$ ein geeigneter Startvektor ist.

b) Rechnen Sie drei Schritte **ohne** Normierung, und bestimmen Sie mit dem Rayleighquotienten eine Näherung für den betragsgrößten Eigenwert.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für den relativen Fehler dieser Näherung und vergleichen Sie diese mit dem tatsächlichen relativen Fehler.

Hinweis: Der betragsgrößte Eigenwert lautet 10.20673 und der zugehörige Eigenvektor ist $(0.0956397, 0.10891060, 0.98944000)^T$.

G 36 (*Wielandt-Verfahren*)

Gesucht ist der kleinste Eigenwert λ_3 der Matrix

$$\begin{pmatrix} 30 & 2 & 0 \\ 2 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Schätzen Sie λ_3 mit dem Satz von Gerschgorin ab.

b) Führen Sie einen Schritt des Wielandt-Verfahrens mit $\mu_0 = 10$ und $x_0 = (0, 0, 1)^T$ durch.

c) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu x_0, also aus $R(x_0; (A - \mu I)^{-1})$.

d) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu x_1, also aus $R(x_1; A)$, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus c).

G 37 (*Selbstadjungierte Probleme*)

Die Randwertaufgabe

$$((1 + x)^3 y')' + \sin(x)y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 1$$

soll unter Verwendung von Differenzenverfahren mit Gitterabstand $h = \frac{1}{n}$ gelöst werden.

a) Formen Sie die Differentialgleichung durch Ausdifferenzieren um und bestimmen Sie eine Diskretisierung mit Differenzenformeln zweiter Ordnung. Ist die erhaltene Matrix symmetrisch?

b) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung durch iteriertes Anwenden von Differenzenformeln zweiter Ordnung mit halbierter Schrittweite. Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung eine symmetrische Matrix liefert.

Hausübung

H 34 (*Vektoriteration mit falschen Voraussetzungen*)

Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sind reell und lauten der Größe nach geordnet $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (ohne Normierung) mit Startvektor $x^{(0)} = (1, 3, -1)^T$ durch. Folgern Sie daraus, dass für alle $k \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\varrho_k = -\frac{5}{11} \quad , \quad x^{(k)} = \begin{cases} x^{(0)}\,, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (1, -1, 3)^T\,, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

b) Mit a) ist gezeigt, dass die Folge der ϱ_k gegen einen falschen Wert konvergiert und die Folge der $x^{(k)}$ oszilliert, d.h. nicht konvergiert. Welche wesentliche Voraussetzung für die Konvergenz des Verfahrens von Mises ist in diesem Fall verletzt?

H 35 (*Differenzenverfahren*)

Die Randwertaufgabe

$$-y'' + x^2 y' + y^3 = -1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

soll mit einem Differenzenverfahren gelöst werden.

a) Diskretisieren Sie das Problem mit Gitterbreite $h = \frac{1}{n}$.

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix des Systems. Zeigen Sie, daß es sich dabei um eine irreduzibel diagonaldominante L-Matrix handelt.

H 36 (*Praktische Aufgabe: v. Mises - Verfahren*)

Implementieren Sie das von Mises-Verfahren oder benutzen Sie die Implementierung dieses Verfahrens in *NumaWWW*:

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`

Testen Sie es an Matrizen, die Sie sich folgendermaßen generieren:

$$A := T \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) T^T,$$

wobei

$$T_{i,j} = \sin\left(\frac{i \cdot j \cdot \pi}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{n+1}}\right).$$

und $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Was passiert für $|\lambda_1| = |\lambda_2|$? Was im Falle von $|\lambda_1| >> |\lambda_2|$?

Abgabetermin:	Dienstag, 30. Januar 2007
Programmieraufgabe:	bis zum 6. Februar 2007.