Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16. Januar 2007

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 11

Gruppenübung

G 32 (*Gesamtschrittverfahren, Einzelschrittverfahren, SOR-Verfahren*)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie zum Startvektor $x^{(0)} = (-6, -6)^T$ jeweils drei Schritte des Gesamt, Einzelschritt und SOR-Verfahrens mit $\omega = 1.125$ durch.

b) Erstellen Sie eine Skizze, die die beiden Gleichungen des Systems als Geraden interpretiert und ergänzen Sie die Skizze um die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Einzelschritt und des SOR-Verfahrens und um

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Gesamtschrittverfahrens. Interpretieren Sie!

G 33 (*Eigenschaften von Matrizen*)

Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 21 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3+a & 0 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

auf die Eigenschaften Irreduzibilität, strikte und irreduzible Diagonaldominanz, L- und M-Matrix.

G 34 (*Konvergenz des ESV*)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_i &= 3x_{i+1} + b_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ x_n &= b_n. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß das Einzelschritt-Verfahren für alle Startwerte konvergiert.

b) Berechnen Sie mit $b = (0, \dots, 0, -3, 1)^T$, $n = 100$ und $x^{(0)} = (0, \dots, 0)^\top$ den Fehler $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ für alle Iterierten $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hausübung

H 31 (*CG-Verfahren*)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Rechnen Sie zwei Schritte mit dem *cg*–Verfahren und dem Startvektor $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie, dass die beiden Richtungen p_0 und p_1 aus a) A-orthogonal zueinander sind.

c) Tragen Sie die Iterationsschritte in ein (ξ_1, ξ_2)-Koordinatensystem ein, und zeichnen Sie zusätzlich die Höhenlinien der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ durch die Punkte x_0, x_1 und x_2.

Hinweis: Bei den Höhenlinien handelt es sich um Ellipsen, deren Hauptachsen Vielfache der Eigenvektoren der Matrix A sind.

H 32 (*Konvergenz Gesamtschritt-, Einzelschrittverfahren*)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie Einzel- und Gesamtschrittverfahren auf Konvergenz.

H 33 (*Gauß-Seidel-Verfahren, Schlecht konditionierte Matrix*)

Um das Verfahren von Gauß-Seidel für schlecht konditionierte Matrizen zu testen, betrachten wir die L-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} n & -a & \dots & -a & -a \\ -a & n & \dots & -a & -a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a & -a & \dots & n & -a \\ -a & -a & \dots & -a & n \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq a < \frac{n}{n-1}$, wobei n die Dimension, d.h. die Größe der Matrix A angibt.

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das zunächst die Dimension n und einen Parameter $frac$ einliest. Der Parameter bestimmt den Wert von a mit

$$a = (frac * n)/(1.0 * (n - 1));$$

so dass für $frac$ nahe 1 der Wert von a gegen seine obere Grenze wandert. Diese Grenze garantiert jedoch die Eigenschaft der L-Matrix von A.

Nun soll ein Gleichungssystem $Ax = b$ erstellt werden, zu dem wir schon die exakte Lösung $xsol$ kennen.

$$\begin{aligned} A &= -a. * ones(n, n) + (n + a) * eye(n); \\ xsol &= ones(n, 1); \\ b &= A * xsol; \end{aligned}$$

Anschließend soll diese Lösung zurückgerechnet werden, und zwar mit dem Verfahren von Gauß-Seidel auf acht Stellen genau, d.h.

$$norm(xneu - xsol, inf) \quad <= \quad 10^{(-8)} * norm(xsol, inf);$$

Als Ausgabe ist die benötigte Schrittzahl sowie die Konditionszahl der Matrix A, die jedoch auch direkt mit $cond = \frac{n+a}{a+(1-a)*n}$ (woher ?) angegeben werden kann, erwünscht.

Testen Sie das Programm mit den Werten $n = 100$, dem Nullvektor als Startvektor sowie $frac = 0.5, 0.9, 0.99$ und 0.999, und untersuchen Sie die Ergebnisse auf Zusammenhänge.

Abgabetermin:	Dienstag, 23. Januar 2007
Programmieraufgabe:	bis zum 30. Januar 2007.