Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Januar 2007

Numerik für CE, Ing. und Phys., Übung 10

Gruppenübung

G 29 (*Modifiziertes Newtonverfahren*)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \arctan(x)$.

a) Bestimmen Sie zu $f(x)$ die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens und des modifizierten Newtonverfahrens.

b) Führen Sie mit $x^0 = 10$ einen Newtonschritt aus und überprüfen Sie, ob die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$|f(x^1)| \quad < \quad |f(x^0)|.$$

c) Geben Sie für das modifizierte Newtonverfahren die Anzahl der Halbierungen von λ an, die notwendig sind, um die Bedingung aus b) zu erfüllen.

G 30 (*Newtonverfahren in 2D*)

Das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 e^{(1-x_2)} \\ 5x_1 - 5x_2 + 4 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem Newton–Verfahren gelöst werden. Bestimmen Sie $x^{(1)}$ für den Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.

G 31 (*Vereinfachtes Newtonverfahren in 2D*)

Das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 e^{(1-x_2)} \\ x_1 - 10x_2 + 8 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem vereinfachten Newton–Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - AF(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gelöst werden. Die Matrix A sei dabei gegeben durch $A := (\mathcal{J}_F(\bar{x}))^{-1}, \bar{x} = (1,1)^T$.

a) Schreiben Sie das Verfahren als Picard-Iteration, d.h. in der Form

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und zeigen Sie, daß die Iteration für alle Startwerte $x^{(0)}$ aus $\mathcal{D} := \mathbb{R} \times [0, 2]$ konvergiert.

Hinweis: Benutzen Sie die $\| \cdot \|_\infty$-Norm.

b) Wieviele Schritte des Verfahrens sind erforderlich, um mit $x^{(0)} = \bar{x}$ eine Genauigkeit von $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-3}$ zu garantieren ?

Hinweis: Vereinfachen Sie die Iterationsfunktion vor dem Einsetzen der Zahlen. Der Nachweis der Selbstabbildungseigenschaft ist einfacher durch direktes Nachrechnen.

c) Bestimmen Sie $x^{(3)}$. Was fällt auf? Vergleichen Sie die Resultate mit b).

Hausübung

H 28 (*Divisionsfreie Division*)

Um den Kehrwert einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ zu bestimmen, ohne eine Division durchzuführen, verwenden einige Computer ein Schema, das auf dem Newton–Verfahren basiert. Hierzu sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} - a$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens so, dass keine Division Verwendung findet.

b) Berechnen Sie für $a = 0.75$ und den Startwert $x^{(0)} = 1.5$ zwei Schritte der Newton–Iteration.

c) Veranschaulichen Sie das Resultat an einer Skizze.

H 29 (*Vereinfachtes Newton-Verfahren*)

Man beweise unter Verwendung des vereinfachten Newton-Verfahrens

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - AF(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $A := (\mathcal{J}_F(0,0))^{-1}$ und durch Anwendung geeigneter Sätze, dass die Funktion

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)x + 0.2 \\ 2x + 4y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)y - 0.2 \end{pmatrix}$$

im Quadrat $-0.4 \leq x, y \leq 0.4$ genau eine Nullstelle besitzt. Ein geeigneter Startwert ist $x^{(0)} = (0, 0)^T$.

H 30 (*NumaWWW: Schnittpunkte von Ellipsen*)

Auf dem NumaWWW-Server

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/`

kann unter den Menüpunkten `nichtlineare Gleichungssysteme`, `zweidimensionales Newton-Verfahren` auf einfache Weise das 2-D Newton–Verfahren erprobt werden. Die Lösung der folgenden Aufgabe kann allerdings auch mit dem Taschenrechner berechnet werden.

Es sollen die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1$$

mit dem Newton–Verfahren bestimmt werden. Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = \binom{1.5}{1.8}$ mindestens zwei Schritte des Newton–Verfahrens aus. Wenn Sie die WWW-Seite zur Berechnung benutzen, so verwenden Sie ebenfalls die Startpunkte $x^{(0)} = \binom{-0.1}{-0.1}, \binom{100}{50}, \binom{1}{0}$.

Abgabetermin:	Dienstag, 16. Januar 2007
Programmieraufgabe:	bis zum 16. Januar 2007.